Übungen zu Analysis II

B. Fiedler, J. Härterich

Abgabe am 19.6.2003 in der Vorlesung

Aufgabe 33:
Sei (E, d) ein metrischer Raum und $B \subseteq A \subseteq E$. Zeige:

$$B \text{ ist offen in } A \quad \Longleftrightarrow \quad \text{es existiert } B' \subseteq E, \text{ offen in } E \text{ mit } B = A \cap B'.$$

Folgere daraus, dass B genau dann abgeschlossen in A ist, wenn eine Menge B'' existiert, die abgeschlossen in E ist und für die gilt: $B = A \cap B''$.

Aufgabe 34:
Es sei (E, d) ein metrischer Raum und $A \subseteq E$ eine Teilmenge.
Beweise oder widerlege:

(i) E ist offen und abgeschlossen in E,

(ii) $\mathring{A} = \mathring{\mathring{A}}$,

(iii) $\overline{\mathring{A}} = \overline{\mathring{\overline{A}}}$,

(iv) $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$

Aufgabe 35:

(i) Sei (E, d) ein metrischer Raum und $A \subseteq E$. Zeige, dass

$$\overline{A} = \{a \in E; \;\; \text{es existieren } a_n \in A \;\text{ mit }\; a_n \to a\}.$$

(ii) Zeige, dass in metrischen Räumen konvergente Folgen immer Cauchy-Folgen sind.

Aufgabe 36:
Eine *Cantormenge* sei definiert als eine abgeschlossene, total unzusammenhängende, perfekte Menge $C \subseteq [0, 1]$.

(i) Sind endliche bzw. abzählbare Vereinigungen von Cantormengen wieder Cantormengen?

(ii) Ist der Durchschnitt zweier Cantormengen wieder eine Cantormenge?

(iii) Gibt es Cantormengen $C \subseteq [0, 1]$ bezüglich der üblichen Metrik $d(x, y) = |x - y|$ auf $\mathbb{R}$, die nicht Lebesgue-Nullmengen sind?