# Fragen über metrische Räume

1. Was ist eine Metrik? Gib drei verschiedene Beispiele !
2. Wann ist eine Teilmenge eines metrischen Raumes offen, wann abgeschlossen ?
3. Sind endliche (abzählbare, beliebige) Durchschnitte oder Vereinigungen offener/abgeschlossener Mengen wieder offen/abgeschlossen ?
4. Wann liegt eine Teilmenge $B$ eines metrischen Raumes dicht in einer anderen Teilmenge $A$ ?
5. Wann ist eine Teilmenge eines metrischen Raumes zusammenhängend ?
6. Was sind Zusammenhangskomponenten ? Wann heißt eine Teilmenge eines metrischen Raumes total unzusammenhängend ?
7. Sind endliche (abzählbare, beliebige) Durchschnitte oder Vereinigungen zusammenhängender/kompakter Mengen wieder zusammenhängend/kompakt ?
8. Wann ist ein metrischer Raum kompakt ? Gib je ein Beispiel für einen kompakten und einen nicht-kompakten metrischen Raum an.
9. Was ist der Rand, das Innere und der Abschluss einer Menge ?
10. Betrachte $M = \cup_{n\in\mathbb{N}}(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n})$ als Teilmenge des metrischen Raums $\mathbb{R}$ mit der üblichen Metrik. Was ist dann der Rand, das Innere und der Abschluss von $M$ ?
11. Was versteht man unter einer Cantor-Menge ? Gib ein Beispiel an.
12. Formuliere den Satz von Baire!
13. Wann heisst eine Folge konvergent, wann Cauchy-Folge ?
14. Zeige, dass in einem metrischen Raum jede konvergente Folge eine Cauchy-Folge ist.
15. Wann heißt ein metrischer Raum vollständig ?
16. Gib mindestens zwei äquivalente Definitionen für Stetigkeit in metrischen Räumen.
17. Ist für stetiges $f$ und $K$ offen/abgeschlossen/kompakt/zusammenhängend auch $f(K)$ offen/abgeschlossen/kompakt/zusammenhängend ?
18. Sei $X$ ein metrischer Raum. Formuliere und beweise den Zwischenwertsatz für stetige Abbildungen $f : X \to \mathbb{R}$.
19. Gib drei äquivalente Definitionen für Kompaktheit in metrischen Räumen.
20. Wie kann man im $\mathbb{R}^n$ kompakte Mengen charakterisieren ?
21. Was sagt der Satz von Arzela-Ascoli ?
22. Formuliere den Banachschen Fixpunktsatz und skizziere seinen Beweis !