Kernfragen zur Differentiation im Banachraum (Teil 1)

1. Wann heißt eine Abbildung f zwischen zwei Banachräumen X und Y Fréchet-differenzierbar? Was ist die Fréchet-Ableitung von f ?

2. Ist eine Fréchet-differenzierbare Abbildung f zwischen zwei Banachräumen X und Y immer stetig ?

3. Schreibe die Ableitung von $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ mit Hilfe ihrer partiellen Ableitungen !

4. Was ist die Ableitung des Skalarproduktes im Hilbertraum H ?

5. Berechne den Gradienten von $f : x \to \|x\|_2^{-1}$ für $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, wobei $\|x\|_2$ die euklidische Norm von x bezeichnet.

6. Formuliere die Kettenregel für die Ableitung von $f \circ g$!

7. Sind stetig differenzierbare Funktionen mit beschränkter Ableitung (global) Lipschitz–stetig ? Beweis ?

8. Welche der folgenden Aussagen sind richtig für $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, welche davon sind falsch ?

$$\begin{aligned}
f \text{ partiell differenzierbar} &\implies f \text{ stetig} \\
f \text{ differenzierbar} &\implies f \text{ partiell differenzierbar} \\
f \text{ partiell differenzierbar und } f \text{ stetig} &\implies f \text{ differenzierbar} \\
f \text{ stetig partiell differenzierbar} &\implies f \text{ stetig differenzierbar}
\end{aligned}$$

9. Formuliere den Satz über implizite Funktionen.

10. Gib Bedingungen an, so dass die Abbildung $f : X \to X$ lokal invertierbar ist.

11. Berechne die Ableitung der implizit gegebenen Funktion $x_n(x_1, \cdots, x_{n-1})$, die

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1 \text{ erfüllt !}$$

12. Warum bezeichnet der Gradient die „Richtung des steilsten Anstiegs“ einer Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$?