Freiwillige Ferienaufgaben zur Analysis II

B. Fiedler, J. Härterich

Aufgabe F1 (schnell konvergente π-Reihe):

(i) Zeige die Identität
$$\int_0^1 \frac{64 - 32x^3 - 16x^4 - 16x^5}{16 - x^8}\, dx = \pi.$$
Tipp: $(x^8 - 16)(x - 1) = (x^2 - 2)(x^2 - 2x + 2)(x^5 + x^4 + 2x^3 - 4)$.

(ii) Zeige, dass für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt: $\int\limits_0^1 \frac{x^{k-1}}{16 - x^8}\, dx = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{16^{n+1}(8n+k)}$.

(iii) Folgere daraus, dass die folgende Reihendarstellung gilt:
$$\pi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{16^n} \left(\frac{4}{8n+1} - \frac{2}{8n+4} - \frac{1}{8n+5} - \frac{1}{8n+6} \right).$$

(iv) Untersuche mit `MATHEMATICA` oder `MATLAB`, wie viele korrekte Dezimalstellen von π die Partialsummen bis $n = 5, 10, 30, 100$ liefern ?

Aufgabe F2: π ist eine Irrationalzahl

Ivan Niven hat 1947 den folgenden elementaren Beweis für die Irrationalität von π gefunden. Betrachte für festes $\alpha \in \mathbb{R}$ die Folge von Integralen
$$A_n = \int_{-1}^{1} (1 - x^2)^n \cos(\alpha x)\, dx.$$

(i) Zeige, dass die A_n der Rekursion
$$A_n = \frac{2n(2n-1)A_{n-1} - 4n(n-1)A_{n-2}}{\alpha^2}$$
genügen und berechne A_0 sowie A_1.

(ii) Zeige, dass A_n von der Form
$$A_n = \frac{n!}{\alpha^{2n+1}} \left(P_n(\alpha)\sin(\alpha) - Q_n(\alpha)\cos(\alpha)\right)$$
ist, wobei P_n, Q_n Polynome vom Grad $\leq 2n - 1$ mit ganzzahligen Koeffizienten sind.

(iii) Wir nehmen nun an, dass $\pi = \frac{p}{q}$ rational ist und wählen ab jetzt $\alpha := \frac{\pi}{2} = \frac{p}{2q}$ fest. Zeige, dass dann
$$\frac{p^{2n+1}A_n}{n!}$$
für alle $n \in \mathbb{N}$ eine ganze Zahl ist.

(iv) Sei weiterhin $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Beweise die (grobe) Abschätzung $0 < A_n < 2$ und benutze sie, um zu einem Widerspruch zu gelangen.

Bemerkung: π ist sogar transzendent, siehe [S. Lang: Algebra]

Aufgabe F3:
Beweise oder widerlege: Regelfunktionen können höchstens abzählbar viele Sprungstellen besitzen.

Aufgabe F4:
Mit Hilfe des Abelschen Grenzwertsatzes (siehe Ferienblatt zur Analysis I) kann man zeigen, dass die Reihenentwicklung

$$\arcsin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n) \cdot (2n+1)} x^{2n+1}$$

auch für $x = +1$ gilt.

(i) Benutze dies, um zu begründen, dass die Reihenentwicklung

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n) \cdot (2n+1)} \sin^{2n+1} y$$

für $0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}$ gilt und dass über $[0, \frac{\pi}{2}]$ gliedweise integriert werden darf.

(ii) Folgere daraus, dass

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

(iii) Zeige auch, dass

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Aufgabe F5:
Sei φ_n eine Dirac–Folge bestehend aus stetig differenzierbaren Funktionen. Weiter sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ beschränkt und stetig differenzierbar mit beschränkter Ableitung.
Dann gilt

$$(\varphi_n' * f)(x) \to f'(x) \quad \text{für } \ n \to \infty.$$

oder kurz „ $\delta' * f = \delta * f'$ “.

Aufgabe F6:
Betrachte die 2π-periodische Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die definiert ist durch

$$f(x) = e^{\alpha x}, \qquad -\frac{\pi}{2} \leq x < \frac{3\pi}{2}.$$

Berechne ihre Fourier-Reihe und ermittle für $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ den Wert der Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\alpha^2 + k^2}.$$

Wie verhält sich die Reihensumme für $\alpha \searrow 0$?
Dabei darf vorausgesetzt werden, dass die Fourier-Reihe $\tilde{f}(x)$ gegen $f(x)$ konvergiert, wenn f im Punkt x stetig ist.

Aufgabe F7:
Sei $f : [a, b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und die partielle Ableitung $\frac{\partial f}{\partial y}$ nach y sei ebenfalls stetig. Zeige, dass dann $\displaystyle\int_a^b f(x, y)\, dx$ stetig differenzierbar in y ist und $\displaystyle\frac{d}{dy}\int_a^b f(x, y)\, dx = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\, dx.$

Aufgabe F8:
Bezeichne $\Gamma(t)$ die Gamma-Funktion $\Gamma(t) = \displaystyle\int_0^\infty x^{t-1}\, e^{-x}\, dx$. Zeige, dass

i) $\Gamma : (0, \infty) \to \mathbb{R}^+$ beliebig oft stetig differenzierbar ist (dabei darf natürlich die vorige Aufgabe verwendet werden).

ii) Die Gammafunktion ist logarithmisch konvex, d.h. $(\log(\Gamma(t))'' > 0$ für alle $t > 0$.
(*Tipp:* Zeige zunächst, dass $\lambda^2\Gamma(t) + 2\lambda\Gamma'(t) + \Gamma''(t) > 0$ gilt für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ und festes $t > 0$ und wähle dann $\lambda = \alpha\Gamma'(t)/\Gamma(t)$ mit einem geeigneten α.)

Aufgabe F9 (Der Wert des uneigentlichen Integrals $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx$) :
Zeige, dass die Funktion $F : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ mit

$$F(t) = \left(\int_0^t e^{-x^2}\, dx\right)^2 + \int_0^1 \frac{e^{-t^2(x^2+1)}}{x^2 + 1}\, dx$$

konstant ist und benutze diese Tatsache, um das uneigentliche Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx$$

zu berechnen.
Tipp: Aufgabe F7

Aufgabe F10:
Sei (E, d) ein metrischer Raum mit Metrik $d : E \times E \to \mathbb{R}$. Zeige, dass durch

$$\begin{aligned} \tilde{d} : E \times E &\to \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto \tilde{d}(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)} \end{aligned}$$

eine äquivalente Metrik gegeben ist d.h. eine Menge ist offen in (E, d) genau dann, wenn sie in $(E, \tilde{d})$ offen ist.
Insbesondere besitzt jeder metrische Raum eine zu d äquivalente, *beschränkte* Metrik.

Aufgabe F11 (Satz von Dini):
Sei K ein kompakte Menge. Die Folge der stetigen Funktionen $f_n : K \to \mathbb{R}$ sei monoton wachsend, d.h. $f_{n+1}(x) \geq f_n(x)$ für alle $x \in K$, und konvergiere punktweise gegen die Funktion f.
Zeige, dass die Konvergenz sogar gleichmäßig ist, falls der Limes f eine stetige Funktion ist.

Aufgabe F12:
Zeige, dass sich jede offene Menge $M \subseteq \mathbb{R}^2$ als eine abzählbare Vereinigung abgeschlossener, achsenparalleler Quadrate darstellen lässt, deren Inneres paarweise disjunkt ist.

Aufgabe F13:
Beweise den Satz von Lindelöf: Jede offene Überdeckung einer Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ enthält eine abzählbare Teilüberdeckung.

Aufgabe F14:
Sei K kompakt und $(\Omega_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine offene Überdeckung von K. Zeige, dass es dann ein $r > 0$ gibt, so dass jede Kugel $B_r(x)$, $x \in K$ in einem der Ω_i liegt.

Aufgabe F15: Jede kompakte Teilmenge eines metrischen Raumes enthält eine abzählbare dichte Teilmenge.

Aufgabe F16:
Sei E ein metrischer Raum und $A \subseteq E$. Zeige:

(i) $\partial\partial A \subseteq \partial A$
und gib ein Beispiel, bei dem die beiden Mengen *nicht* übereinstimmen.

(ii) $\partial\partial\partial A = \partial\partial A$.

Aufgabe F17:
Sei $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und für jedes $t > 0$ konvergiere die Folge $f(t), f(2t), f(3t), \ldots$ gegen 0.
Zeige, dass dann auch

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$$

gilt.

Tipp: Satz von Baire !

Aufgabe F18: Inverser Banachscher Fixpunktsatz
Sei X ein Banachraum und $f : X \to X$ sei eine surjektive Abbildung, so dass für eine Konstante $M > 1$ gilt:

$$\|f(x) - f(y)\| \geq M \cdot \|x - y\|.$$

Dann besitzt f genau einen Fixpunkt.

Aufgabe F19:
Für eine symmetrische $n \times n$-Matrix A definieren wir

$$\begin{array}{rccc} \varphi_A : & \mathbb{R}^n & \mapsto & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \frac{1}{2}\, x^T\, A\, x \end{array}$$

Berechne die Ableitung grad φ_A. Für welche x ist grad $\varphi_A(x) = \lambda x$ für ein $\lambda \in \mathbb{R}$? Zeichne (z.B. mit `MATLAB` oder `MATHEMATICA`) die “Höhenlinie” bzw. “Niveaufläche” $\{x \mid \varphi_A(x) = 1\}$ für die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Zeichne an einigen Punkten auch grad φ_A für diese Beispiele. Steht der Gradient senkrecht auf den Höhenlinien, bzw. auf differenzierbaren Kurven, die innerhalb einer Niveaufläche verlaufen?

Aufgabe F20:
Sei A eine reelle orthogonale $n \times n$-Matrix, also $A^T A = \mathrm{id}$.

(i) Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ differenzierbar und invariant unter A, d.h. $f(Ax) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$. Zeige, dass der Gradient von f äquivariant ist, d.h.

$$A \operatorname{grad} f(x) = (\operatorname{grad} f)(Ax) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n.$$

(ii) Sei nun $v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ differenzierbar und äquivariant unter A. Zeige, dass dann die Divergenz

$$\operatorname{div} v = \sum_{i=1}^{n} \partial_{x_i} v_i \;:\; \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

invariant unter A ist.

Aufgabe F21:
Sei $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ Gateaux-differenzierbar und $f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar für $k = 1, 2, \ldots, n$. Berechne den Gradienten der Funktion

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mapsto g(f_1(x_1), f_2(x_2), \ldots, f_n(x_n)).$$

Aufgabe F22:
Ein *reales Gas* genügt der Zustandsgleichung

$$\left(p + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = R \cdot T,$$

wobei p den Druck, V das Volumen und T die Temperatur bezeichnet. R, a und b sind positive Konstanten.

(i) Offensichtlich lässt sich die Zustandssgleichung nach T oder nach p auflösen:

$$\begin{aligned} T(V,p) &= \frac{1}{R}\left(p + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) \\ p(V,T) &= \frac{RT}{V - b} - \frac{a}{V^2} \end{aligned}$$

Unter welchen Bedingungen kann man die Zustandsgleichung lokal nach der Variablen $V = V(p,T)$ auflösen ?

(ii) Betrachte nun die so definierten Funktionen $T(V,p)$, $p(V,T)$ und $V(p,T)$ und zeige

$$\frac{\partial p}{\partial V} \cdot \frac{\partial V}{\partial T} \cdot \frac{\partial T}{\partial p} = -1,$$

ohne die partiellen Ableitungen explizit zu berechnen.

Aufgabe F23:
Betrachte die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = (x^2+y^2)^2 - 3x(x^2+y^2) + 2x^2.$$

Zeige, dass f auf jeder Geraden durch den Ursprung ein lokales Minimum in $(0,0)$ hat.
Zeige weiter, dass f in $(0,0)$ *kein* lokales Minimum besitzt.

Aufgabe F24:
Seien X, Y Banachräume, $\Omega \subseteq X$ offen und $f : \Omega \to Y$ differenzierbar mit $Df(x) = 0$ für alle $x \in \Omega$. Zeige, dass f auf jeder Zusammenhangskomponente von Ω konstant ist.

Aufgabe F25:
Sei x_0 eine einfache Nullstelle des Polynoms

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0.$$

Zeige, dass dann jedes Polynom

$$\tilde{a}_n x^n + \tilde{a}_{n-1}x^{n-1} + \ldots + \tilde{a}_1 x + \tilde{a}_0,$$

dessen Koeffizienten die Bedingung

$$\sum_{k=0}^{n} |a_k - \tilde{a}_k| < \varepsilon$$

für ein hinreichend kleines ε erfüllen, genau eine einfache Nullstelle $x_0(\tilde{a}_0, \tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_n)$ in einer Umgebung von x_0 besitzt.
Berechne ausserdem die (partielle) Ableitung der Nullstelle x_0 nach dem Koeffizienten a_k.

Aufgabe F26 (einfache Eigenwerte hängen differenzierbar von einem Parameter ab) :
Sei

$$\begin{aligned} A : \mathbb{R} &\to \mathbb{R}^{n^2} \\ \mu &\mapsto A(\mu) = \begin{pmatrix} a_{11}(\mu) & a_{12}(\mu) & \ldots & a_{1n}(\mu) \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(\mu) & a_{n2}(\mu) & \ldots & a_{nn}(\mu) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

eine differenzierbare Matrix-Funktion, d.h. alle a_{ij} sind differenzierbar.
Sei weiter λ ein einfacher Eigenwert von $A(0)$.
Zeige, dass $A(\mu)$ für hinreichend kleine $|\mu|$ genau einen Eigenwert $\lambda(\mu)$ in der Nähe von λ besitzt und dass die Abbildung

$$\mu \mapsto \lambda(\mu)$$

differenzierbar ist.

Bearbeitete Aufgaben werden zu Beginn des Wintersemesters besprochen

Schöne Ferien !