

Übungen
Dynamischen Systeme II
Karsten Matthies, Stefan Liebscher
Abgabe: Dienstag, 29.4.2003, in der Vorlesung

Aufgabe 1: Sei

$$\Sigma_N^+ = \left\{ s = (s_j)_{j \in \mathbb{N} \cup \{0\}} \mid s_j \in \{0, \dots, N-1\} \right\}$$

die Menge der Folgen auf N Symbolen mit der in der Vorlesung definierten Metrik und

$$\sigma : \Sigma_N^+ \rightarrow \Sigma_N^+, \quad (s_j)_{j \in \mathbb{N} \cup \{0\}} \mapsto (s_{j+1})_{j \in \mathbb{N} \cup \{0\}},$$

der Halbshift.

- (i) Wieviele Fixpunkte hat σ ?
- (ii) Bestimme für jeden Fixpunkt die stabile Menge

$$W^s(p) = \left\{ x \in \Sigma_N^+ \mid \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma^n(x) = p \right\}.$$

Aufgabe 2: Sei $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ein Homöomorphismus.

- (i) Zeige, dass Φ keine periodischen Punkte mit minimaler Periode größer als 2 besitzt.
- (ii) Gib ein Beispiel eines Homöomorphismus mit periodischen Punkten der minimalen Periode 2 an.
- (iii) Zeige, dass Φ keine *letztendlich periodischen* Punkte zulässt.

Aufgabe 3: Betrachte die Zeltabbildung $T : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ auf dem Einheitsintervall:

$$T(x) = \begin{cases} 2x & \text{für } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 2 - 2x & \text{für } \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Bestimme die Anzahl der Punkte mit (nicht notwendig minimaler) Periode n .

Aufgabe 4: Sei $\Phi : M \rightarrow M$ eine stetige Abbildung eines metrischen Raumes M . Wir nennen die Folge $(\xi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ einen δ -Pseudoorbit, wenn für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\text{dist}(\Phi(\xi_k), \xi_{k+1}) < \delta.$$

Wie nennen einen Φ -Orbit $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} = (\Phi^k(x_0))_{k \in \mathbb{N}}$ in M einen ε -Schatten des Pseudoorbits $(\xi_k)_{k \in \mathbb{N}}$, wenn für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\text{dist}(x_k, \xi_k) < \varepsilon.$$

Wir sagen, dass (M, Φ) die *Schatteneigenschaft* besitzt, falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass jeder δ -Pseudoorbit einen ε -Schatten hat.

- (i) Interpretiere die Schatteneigenschaft aus Sicht der Numerik.
- (ii) Beweise, dass der Halbshift auf zwei Symbolen die Schatteneigenschaft besitzt.

Freiwilliger Zusatz: Ist der Schatten eindeutig?