Übungen

Dynamischen Systeme II

Karsten Matthies, Stefan Liebscher

Abgabe: Dienstag, 8.5.2003, in der Vorlesung

Aufgabe 5: Zeige, dass die Zeltabbildung $T : [0,1] \to [0,1]$ auf dem Einheitsintervall chaotisch ist.

$$T(x) \;=\; \begin{cases} 2x & \text{für } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 2-2x & \text{für } \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Aufgabe 6: Zeige, dass die logistische Abbildung $F_4 : [0,1] \to [0,1]$ chaotisch ist.

$$F_4(x) \;=\; 4x(1-x).$$

Hinweis: Zeige zum Beispiel, dass F_4 und die Zeltabbildung T konjugiert sind. Die Konjugation H mit $F_4 \circ H = H \circ T$ hat die Gestalt $H(y) = \sin^2(\alpha y)$. (Bestimme α.) Begründe dann, dass Chaotizität invariant unter Konjugationen ist.

Aufgabe 7: [Addier-Maschine] Betrachte den Raum Σ_2^+ der Folgen auf den Symbolen $\{0,1\}$. Zu beliebigem $g \in \Sigma_2^+$ definiere die (Additions-)Abbildung

$$T_g \;:\; \Sigma_2^+ \longrightarrow \Sigma_2^+, \qquad a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}} \longmapsto T_g(a) = (T_g(a)_n)_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$$

mittels des Übertrages $r \in \Sigma_2^+$ rekursiv durch:

$$\begin{aligned} r_0 \;&:=\; 0, \\ T_g(a)_n + 2r_{n+1} \;&:=\; a_n + g_n + r_n, \qquad n = 0,1,\ldots \end{aligned}$$

Interpretiert man endliche Anfangsstücke der Folgen als natürliche Zahlen in Dualdarstellung, entspricht somit $T_g(a)$ gerade der Addition von a und g.

(i) Zeige, dass für ein g mit $g_0 = 0$ die Abbildung T_g nicht transitiv auf Σ_2^+ sein kann. Finde dazu nichttriviale invariante Mengen.

(ii) Sei $g = (1,0,0,0,\ldots)$. Zeige, dass T_g transitiv ist.

Freiwilliger Zusatz: Zeige die Transitivität von T_g für alle g mit $g_0 = 1$. Es gilt in diesem Falle sogar, dass jeder(!) Orbit dicht in T_g liegt. Somit existieren keine periodischen Orbits und entsprechend unserer Definition ist T_g nicht chaotisch.

Aufgabe 8: Zeige, dass die Abbildung

$$G \;:\; [-2,2] \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad G(x) = x^3 + x,$$

nicht C^1-strukturell stabil ist.