Übungen

Dynamischen Systeme II

Karsten Matthies, Stefan Liebscher

Abgabe: Donnerstag, 15.5.2003, in der Vorlesung

Aufgabe 9: Sei $f : [0,1] \to [0,1]$ eine stetige Abbildung. Ferner existiere ein periodischer Punkt $p \in [0,1]$ der Periode 4 mit

$$f^4(p) \ = \ p \ < \ f(p) \ < \ f^2(p) \ < \ f^3(p).$$

Zeige, dass dann f auch Punkte jeder minimalen Periode besitzt. Gib ferner ein Beispiel einer stetigen Abbildung an, die ebenfalls einen periodischen Punkt der minimalen Periode 4 (mit einem anderen „Durchlaufsinn") besitzt aber keine Punkte höherer oder ungerader minimaler Perioden zulässt.

Aufgabe 10: Es ist bekannt, dass jeder Fluss φ_t auf dem 2-Torus ohne stationäre oder periodische Lösungen eine globale Transversale S besitzt. Dies bedeutet, S ist eine geschlossene Kurve, die jede Trajektorie schneidet und überall transversal zum Vektorfeld ist.

Finde einen Fluss φ_t auf dem 2-Torus mit (zwei) periodischen Orbits aber nach wie vor ohne Gleichgewichte, der keine solche globale Transversale ermöglicht.

Aufgabe 11: Zeige:

(i) Seien $F_{1,2} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zwei Hebungen der stetigen Abbildung $f : S^1 \to S^1$. Dann existiert eine ganze Zahl $k \in \mathbb{Z}$ mit

$$F_1(\,\cdot\,) \ = \ F_2(\,\cdot\,) + k.$$

(ii) Sei $f : S^1 \to S^1$ ein orientierungserhaltender Homöomorphismus der Kreislinie. Dann gilt für jede Hebung $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ von f:

$$F(\,\cdot\,+1) \ = \ F(\,\cdot\,) + 1.$$

Aufgabe 12: Betrachte die Abbildung $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$A(y) \ = \ \begin{cases} 2y, & 0 \le y < 1 \\ A(y-1)+1, & 1 \le y \\ A(y+1)-1, & y < 0 \end{cases}$$

Dann definiert A eine Abbildung a der Kreislinie $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ in sich. Natürlich ist a kein Diffeomorphismus. Existiert trotzdem zu Anfangswerten y_0 eine Rotationszahl $\varrho(y_0)$? Hängt diese ggf. von y_0 ab?