Übungen

Dynamischen Systeme II

Karsten Matthies, Stefan Liebscher

Abgabe: Donnerstag, 22.5.2003, in der Vorlesung

Aufgabe 13: Zeige durch ein Gegenbeispiel, dass ein Homöomorphismus f der Kreislinie mit rationaler Rotationszahl $\rho(f)$ nicht konjugiert zur Drehung um den Winkel $\rho(f)$ sein muss. Finde eine zusätzliche, notwendige und hinreichende Bedingung an f, so dass dies doch gilt.

Aufgabe 14:

(i) Betrachte das Vektorfeld

$$\dot{y} = f(y), \qquad y \in S^1, \quad f(y) > 0$$

mit zugehörigem Fluss φ_t. Leite mittels Trennung der Variablen eine Formel für die Rotationzahl der Zeit-2π-Abbildung $\varphi_{2\pi}$ her.

(ii) Bestimme für alle α die Rotationszahl $\rho(\alpha)$ der Stroboskop-Abbildung zur Zeit $t = 2\pi$ der Differentialgleichung

$$\dot{x} = \alpha + \sin(x - t), \qquad x \in S^1.$$

Warum ergibt sich lediglich eine Stufe aber keine „Teufelstreppe“?

Aufgabe 15: Eine punktförmige Billardkugel bewegt sich reibungslos und geradlinig im Einheitsquadrat Q. Die Anfangssteigung ist irrational. An den Rändern wird sie jeweils reflektiert, wobei Einfalls- und Ausfallswinkel übereinstimmen.

Sei M eine offene Teilmenge von Q mit Fläche m, und bezeichne $\mu(t)$ die Gesamtlänge der Zeitintervalle in $[0, t]$, zu denen sich die Billardkugel durch M bewegt. Zeige:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\mu(t)}{t} \; = \; m.$$

Freiwilliger Zusatz: Darf Q auch ein Rechteck der Fläche 1 sein? Oder ein Würfel oder Quader?

Aufgabe 16: Konstruiere einen Homöomorphismus $f : S^1 \to S^1$, so dass für einen Punkt $x_* \in S^1$ gilt:

$$(*) \qquad \lim_{n\to\infty} f^n(x) = x_* \qquad \text{für alle } x \in S^1,$$

x_* aber *kein* Attraktor ist.

Freiwilliger Zusatz: Es ist sogar so, dass *kein* Homöomorphismus der Kreislinie, der $(*)$ erfüllt, einen nichttrivialen Attraktor zulässt.