Übungen

Dynamischen Systeme II

Karsten Matthies, Stefan Liebscher

Abgabe: Donnerstag, 5.6.2003, in der Vorlesung

Aufgabe 21: Sei Φ ein Diffeomorphismus des $\mathbb{R}^N$ mit $\Phi(0) = 0$. Bezeichne

$$\begin{aligned} M^s &= \{x \in \mathbb{R}^N \mid \lim_{n\to\infty} \Phi^n(x) = 0\} \\ M^u &= \{x \in \mathbb{R}^N \mid \lim_{n\to\infty} \Phi^{-n}(x) = 0\} \end{aligned}$$

die stabile und instabile Menge von 0. Finde — wenn möglich — je ein Beispiel und ein Gegenbeispiel für die Fälle:

(i) M^s ist eine eingebettete Mannigfaltigkeit.

(ii) M^s ist abgeschlossen.

(iii) $M^s \cap M^u$ besteht aus genau zwei Punkten.

Freiwilliger Zusatz: Finde ein Beispiel, so dass M^s nicht einmal eine (topologische) Mannigfaltigkeit ist.

Aufgabe 22: Weise für die Hopseball-Abbildung

$$\begin{aligned} \varphi_{j+1} &= \varphi_j + v_j, \\ v_{j+1} &= \alpha v_j - \gamma \cos(\varphi_j + v_j) \end{aligned}$$

mit $\varphi_j \in S^1 = \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$, $v_j \in \mathbb{R}$ die Existenz eines Hufeisens nach.

Hinweis: Wähle zum Beispiel die Parameterwerte $\alpha = 1$, $\gamma = 5\pi$ und betrachte das Parallelogramm mit den Eckpunkten $\{(0,0), (2\pi,-2\pi), (2\pi,0), (0,2\pi)\}$.

Aufgabe 23: Sei φ_t ein Fluss und $\Phi = \varphi_1$ die zugehörige Zeit-1-Abbildung. Zeige, dass dann Φ keine transversalen homoklinen Punkte besitzen kann.

Aufgabe 24: Betrachte die durch die Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

definierte Iteration auf dem 2-Torus $T = (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^2$. Finde ein Hufeisen für eine geeignete Iterierte B^k, $k > 0$.

Hinweis: Betrachte den Torus als Einheitsquadrat mit Mittelpunkt $(0,0)$ und verfolge die Bilder eines Parallelogramms parallel zu den Eigenvektoren von B.