Übungen

Dynamischen Systeme II

Karsten Matthies, Stefan Liebscher

Abgabe: Donnerstag, 19.6.2003, in der Vorlesung

Aufgabe 29: Sei $f : [0,1] \to [0,1]$ die Intervallabbildung

$$f(x) \;=\; \begin{cases} x/2 & \text{für } 0 < x \leq 1, \\ 1 & \text{für } 0 = x. \end{cases}$$

Zeige, dass es kein unter dieser Abbildung invariantes Borel-Maß gibt.

Aufgabe 30: Betrachte die Intervallabblildung $f : [0,1] \to [0,1]$, $f(x) = x^2$. Bestimme alle unter f invarianten Wahrscheinlichkeitsmaße. Welche davon sind ergodisch?

Aufgabe 31: Bei der Definition eines unter einer Abbildung f invarianten Maßes μ wird gefordert, dass für alle messbaren Mengen A gilt: $\mu(f^{-1}(A)) = \mu(A)$. Warum wird nicht einfach $\mu(f(A)) = \mu(A)$ gefordert? Welche differenzierbaren bzw. stückweise differenzieraren Funktionen $f : [0,1] \to [0,1]$ erfüllen $\mu(f(A)) = \mu(A)$ für alle Borel-Mengen bezüglich des Lebesgue-Maßes?

Aufgabe 32: Auf dem Folgenraum

$$\Sigma_2 = \{(a_k)_{k\in\mathbb{Z}} \mid a_k \in \{0,1\}\}$$

definieren wir das unter dem Shift σ invariante Wahrscheinlichkeitsmaß μ auf den Zylindermengen

$$U_{N,M}(b) \;=\; \{a \in \Sigma_2 \mid a_i = b_i,\ \text{für alle } N \leq i \leq M\}$$

als $\mu(U_{N,M}(b)) = 2^{-(M-N+1)}$. Dieses Maß wird auf alle Borelmengen von Σ_2 fortgesetzt, so dass es invariant unter dem Shift σ bleibt. Definiere die symmetrische Differenz

$$X \triangle Y \;=\; (X \cup Y) \setminus (X \cap Y) \;=\; (X \cap (\Sigma_2 \setminus Y)) \cup ((\Sigma_2 \setminus X) \cap Y).$$

(i) Zeige, dass es zu jeder Borelmenge B und jedem $\varepsilon > 0$ eine (bzgl. μ) ε-nahe endliche Vereinigung von Zylindermengen $Z = \bigcup_{i=1}^{m} U_{N_i,M_i}(b_i)$ gibt:

$$\mu(B \triangle Z) \;<\; \varepsilon.$$

(ii) Für jede Zylindermenge $Z = U_{N,M}(b)$ und deren Bild $\tilde{Z} = \sigma^{N+M+1}(Z)$ unter dem (genügend weiten) Shift gilt:

$$\mu(Z \triangle \tilde{Z}) \;=\; 2\mu(Z)(1 - \mu(Z))$$

Hinweis: Z und $\tilde{Z}$ sind (als Zufallsereignisse betrachtet) unabhängig.

(iii) Zeige, dass μ ergodisch ist, d.h. jede σ-invariante Borelmenge B das Maß 0 oder 1 hat.