

Übungen  
**Dynamischen Systeme II**  
 Karsten Matthies, Stefan Liebscher  
**Abgabe: Donnerstag, 26.6.2003, in der Vorlesung**

**Aufgabe 33:** Sei  $A = (a_{ij})_{0 \leq i, j \leq N-1} \in \{0, 1\}^N \times \{0, 1\}^N$  eine  $(N \times N)$ -Matrix mit Einträgen 0 oder 1. Definiere den Folgenraum

$$\Sigma_A := \left\{ \mathbf{x} = (x_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in \Sigma_N \mid \forall n \in \mathbb{Z} : a_{x_n x_{n+1}} = 1 \right\}.$$

Hierbei gibt  $A$  die zulässigen Nachfolger eines Folgengliedes  $x_n$  an und wird deshalb als Übergangsmatrix bezeichnet. Sofern keine Spalte und keine Zeile von  $A$  der Nullvektor ist, ist auch  $\Sigma_A \neq \emptyset$ . Wir wollen die topologische Entropie des Shifts  $\sigma$  auf  $\Sigma_A$ , der auch als Subshift vom endlichen Typ bezeichnet wird, bestimmen.

(i) Bezeichne

$$\Sigma_{A,n,\alpha,\beta} := \left\{ (x_0, \dots, x_{n-1}) \mid \mathbf{x} \in \Sigma_A, x_0 = \alpha, x_{n-1} = \beta \right\}.$$

die Menge der endlichen Teilstücke der Länge  $n$ , die mit  $\alpha$  beginnen und mit  $\beta$  enden. Zeige, daß die Anzahl solcher endlichen Teilstücke durch den entsprechenden Eintrag in  $A^n$  gegeben ist:

$$|\Sigma_{A,n,\alpha,\beta}| = (A^n)_{\alpha\beta}$$

(ii) Zeige, daß für die Überdeckung von endlichen Orbit-Stücken der Länge  $n$  durch  $\varepsilon$ -Kugeln mit  $\varepsilon = 1/(2(10N)^m)$  gilt:

$$S_d(\sigma, \varepsilon = 1/(2(10N)^m), n) = \sum_{0 \leq i, j \leq N-1} (A^{2m+n})_{i,j}.$$

(iii) Zeige schließlich, daß die topologische Entropie durch den betragsmäßig größten Eigenwert von  $A$  gegeben ist:

$$h_{\text{top}}(\Sigma_A, \sigma) = |\lambda_{\max}(A)|.$$

**Aufgabe 34:** Betrachte wieder den Subshift vom endlichen Typ aus der vorigen Aufgabe. Sei dazu  $N(n)$  die Anzahl der periodischen Punkte von  $\sigma$  mit (nicht notwendig minimaler) Periode  $n$ . Zeige, daß zumindest für den Subshift endlichen Typs gilt:

$$h_{\text{top}}(\Sigma_A, \sigma) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log N(n).$$

**Aufgabe 35:** Sei  $\varphi \in C^2(S^1)$  ein Diffeomorphismus mit irrationaler Rotationszahl  $\rho(\varphi)$ . Finde ein invariantes Borelmaß  $\mu$ , bezüglich dessen  $\varphi$  ergodisch ist.

*Freiwilliger Zusatz:* Zeige, daß es unter den Wahrscheinlichkeitsmaßen (d.h.  $\mu(S^1) = 1$ ) genau ein solches ergodisches Maß gibt.

**Aufgabe 36:** Sei  $X$  ein kompakter metrischer Raum,  $f : X \rightarrow X$  und  $\mu$  ein invariantes Maß auf  $X$ . Zeige:  $f$  ist genau dann ergodisch bezüglich  $\mu$ , wenn alle  $f$ -invarianten reellwertige  $L^1$ -Funktionen fast überall konstant sind, d.h.

$$\forall \varphi \in L^1_\mu(X, \mathbb{R}) \left( \varphi \circ f = \varphi \implies \exists C \exists Y \subset X : \mu(Y) = 0 \text{ und } \varphi|_{X \setminus Y} \equiv C \right).$$