Übungen

# Dynamischen Systeme II

Karsten Matthies, Stefan Liebscher

**Abgabe: Donnerstag, 3.7.2003, in der Vorlesung**

**Aufgabe 37:** [Vanderbauwhede: Dynamics Reported 2, 1989, pp. 123] Zeige, dass das analytische System

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \mu x - x^2, \\ \dot{y} &= y - x^2, \\ \dot{\mu} &= 0 \end{aligned}$$

keine analytische Zentrumsmannigfaltigkeit $W^c$ in $x = y = \mu = 0$ besitzen kann.

*Freiwilliger Zusatz:* Kann $W^c$ unendlich oft differenzierbar sein?

**Aufgabe 38:** Betrachte das System von Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} \dot{x} &= xy, \\ \dot{y} &= -y - x^2. \end{aligned}$$

Entscheide mit Hilfe einer (lokalen) Zentrumsmannigfaltigkeit, ob die Ruhelage $x = y = 0$ asymptotisch stabil ist.

**Aufgabe 39:** Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ein Vektorfeld zum Fluss $\varphi_t$ mit Fixpunkt $x_0 = 0$. Sei ferner $R : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine lineare Involution ($R \circ R = \mathrm{id}$), unter der das Vektorfeld äquivariant ist:

$$f \circ R \;=\; R \circ f$$

(i) Genüge $f$ den Voraussetzungen des Satzes über die Existenz der globalen Zentrumsmannigfaltigkeit im Punkt $x_0 = 0$. Zeige, dass die Zentrumsmannigfaltigkeit $W^c(x_0)$ die Symmetrie des Vektorfeldes „erbt“:

$$R(W^c) \;=\; W^c.$$

(ii) Genüge $f$ nur den Voraussetzungen des Satzes über die Existenz einer lokalen Zentrumsmannigfaltigkeit. Zeige, dass dann eine symmetrische lokale Zentrumsmannigfaltigkeit existiert:

$$R(W^c_{\mathrm{loc}}) \;=\; W^c_{\mathrm{loc}}.$$

**Aufgabe 40:** Gegeben sei das parameterabhängige Vektorfeld

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 2(x+y)^2 + x - y - \lambda, \\ \dot{y} &= \phantom{2(x+y)^2} - x + y - \lambda. \end{aligned}$$

Bestimme die lokale Zentrumsmannigfaltigkeit und das reduzierte Vektorfeld im Ursprung (zu hinreichender Ordnung). Welches Verzweigungsbild entsteht?