Übungen

Dynamischen Systeme II

Karsten Matthies, Stefan Liebscher

Abgabe: Donnerstag, 10.7.2003, in der Vorlesung

Aufgabe 41: Für $(n \times n)$-Matrizen $A, B \in M^{n\times n}(\mathbb{C})$ definieren wir das Skalarprodukt $(A, B) := \operatorname{trace}(AB^*)$ und den Kommutator $L_A B = [A, B] = AB - BA$. Die Matrix B^* bezeichnet dabei die zu B adjungierte Matrix $(B^*)_{ij} = \overline{(B)_{ji}}$. Zeige:

(i) $(L_A)^* = L_{A^*}$, das heißt

$$\forall B, C \in M^{n\times n}(\mathbb{C}) \;:\; (L_A B, C) = (B, L_{A^*} C)$$

(ii) Berechne $\ker (L_A)^*$ für $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ und $A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$, mit $0 \neq \lambda \neq \mu \neq 0$.

(iii) Zeige, dass die Abbildung

$$\Psi_A \;:\; GL(n) \to M^{n\times n}(\mathbb{C}), \quad G \mapsto G^{-1}AG$$

analytisch ist mit der Ableitung

$$D\Psi_A(\mathrm{id}) \;:\; M^{n\times n}(\mathbb{C}) \to M^{n\times n}(\mathbb{C}), \quad C \mapsto L_A C.$$

Aufgabe 42: Betrachte die Abbildung $f : [0,1] \to [0,1]$,

$$f(y) \;=\; \begin{cases} 0 & \text{für } y = 0, \\ 1/y - [1/y] & \text{sonst,} \end{cases}$$

wobei $[x]$ den ganzzahligen Anteil von x bezeichnet. Der Orbit eines Punktes y liefert dann die Kettenbruckentwicklung:

$$y \;=\; \frac{1}{a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \cdots}}}, \qquad \text{wobei} \quad a_k \;=\; \left[\frac{1}{f^k(y)}\right].$$

(i) Welches sind die Fixpunkte von f?

(ii) Zeige, dass durch

$$\mu(B) \;=\; \frac{1}{\ln 2} \int_B \frac{\mathrm{d}x}{1+x}$$

ein invariantes Wahrscheinlichkeitsmaß auf $[0,1]$ definiert ist.

Freiwilliger Zusatz: Zeige, dass f topologisch konjugiert ist zu einem Subshift des Halbshifts auf *abzählbar* vielen Symbolen. Dabei wird auf der Symbolmenge $\mathbb{N}$ die disktrete Metrik und im Shiftraum $\Sigma^+_{\mathbb{N}} = \{(a_k)_{k\in\mathbb{N}} \,|\, a_k \in \mathbb{N}\}$ die Produkttopologie gewählt.

Aufgabe 43: Sei $H_2(\mathbb{R}^2)$ der Raum der Monome vom Grad 2 in zwei Variablen x, y, also

$$H_2(\mathbb{R}^2) \;=\; \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} x^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} xy \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ x^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ xy \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ y^2 \end{pmatrix} \right\}.$$

Bestimme das Bild von $\operatorname{ad} A(H_2(\mathbb{R}^2))$ für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 44: Zu einer stetigen Funktion $f : [0,1] \to [0,1]$ definieren wir die „Verdopplungsabbildung“ $\mathcal{D}f$ durch:

$$\mathcal{D}f(x) \;:=\; \begin{cases} \frac{2}{3} + \frac{1}{3} f(3x), & \text{falls } x \in [0, \frac{1}{3}], \\ (2 + f(1))(\frac{2}{3} - x), & \text{falls } x \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}], \\ x - \frac{2}{3}, & \text{falls } x \in [\frac{2}{3}, 1]. \end{cases}$$

Wähle ein f und skizziere $\mathcal{D}f$. Zeige

(i) $\mathcal{D}f$ ist stetig und besitzt genau einen Fixpunkt. Dieser ist instabil.

(ii) Ein Punkt $x \in [0,1]$ ist genau dann ein p-periodischer Punkt von f, wenn $x/3$ ein $2p$-periodischer Punkt von $\mathcal{D}f$ ist. Die Stabilität beider Orbits stimmt überein.

Freiwilliger Zusatz: Betrachte die Funktionenfolge $g_n : [0,1] \to [0,1]$,

$$g_0 \equiv 1/3, \qquad g_{n+1} = \mathcal{D}g_n.$$

Zeige:

(i) g_n besitzt je einen periodischen Orbit der Perioden 2^k für $k = 0, 1, ..., n$ und keine weiteren. Der Orbit der Periode 2^n ist stabil, alle anderen sind instabil.

(ii) Der punktweise Grenzwert f_∞ der Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ existiert und ist stetig. Er besitzt je einen instabilen periodischen Orbit der Perioden 2^k, $k \in \mathbb{N}$, und keine weiteren periodischen Orbits.