Übungen

Analysis III

Bernold Fiedler, Stefan Liebscher

Abgabe: Donnerstag, 6.11.2003

Aufgabe 1: Sei $F : L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ definiert durch

$$F(A, v) \;=\; A\,v.$$

Zeige, dass F eine C^2 Funktion ist, und berechne die erste und zweite Ableitung.

Aufgabe 2: Seien $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$, $g : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ C^2-Funktionen. Drücke die Hesse-Matrix

$$\left(\frac{\partial^2 (g \circ f)}{\partial x_i \partial x_j}(x) \right)_{i,j \in \{1,\ldots,n\}}$$

durch die partiellen Ableitungen von g und f bis zur 2. Ordnung aus.

Aufgabe 3: Es sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(0,0) = 0$ und

$$f(x, y) \;=\; xy\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, \qquad \text{für } (x, y) \neq (0, 0).$$

Zeige, dass f überall zweimal partiell differenzierbar ist. Wo gilt $\partial_x \partial_y f = \partial_y \partial_x f$? Begründung?

Aufgabe 4: Sei $f : U \to \mathbb{R}$ auf der offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ partiell differenzierbar. Die partiellen Ableitungen $\partial_1 f, \ldots, \partial_n f$ seien auf U beschränkt.

Beweise oder widerlege: Dann ist f stetig.