Übungen

# Analysis III

Bernold Fiedler, Stefan Liebscher

**Abgabe: Donnerstag, 13.11.2003**

**Aufgabe 5:** Sei $D$ eine konvexe Menge im Banachraum $X$. Betrachte $f : D \to \mathbb{R}$.

(i) Zeige, dass die folgenden Definitionen für Konvexität von $f$ äquivalent sind:

- $\forall a, b \in D,\ \lambda \in [0,1] : \qquad f(\lambda a + (1-\lambda)b) \leq \lambda f(a) + (1-\lambda) f(b).$
- $\{(x,p) \in D \times \mathbb{R} \mid p \geq f(x)\}$ ist eine konvexe Menge.

(ii) Sei $f : D \to \mathbb{R}$ konvex und beschränkt. Zeige, dass dann $f$ stetig in inneren Punkten von $D$ ist.

**Aufgabe 6:** Sei $X$ ein Banachraum und $f : X \to \mathbb{R}$ eine in 0 zweimal Fréchet-differenzierbare Abbildung. Zeige dass die Bilinearform

$$\mathrm{D}^2 f(0) \in \mathcal{L}(X, X, \mathbb{R})$$

symmetrisch ist.

*Hinweis:* Betrachte — analog der Vorlesung bzgl. der Gateaux-Ableitungen — zu $v, w \in X$ die Differenz $g(\lambda) = f(v+\lambda w) - f(\lambda w)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ und nutze die Symmetrie von $g(1)-g(0)$ in $v, w$. Beachte, dass erste Ableitungen zwar in einer ganzen Umgebung, die zweite Ableitung — anders als in der Vorlesung — aber nur in Null verwendet werden darf.

**Aufgabe 7:** Gegeben seien $k$ Punkte $p^{(1)}, \ldots, p^{(k)} \in \mathbb{R}^N$. Bestimme den Punkt $x \in \mathbb{R}^N$, der die Summe der Quadrate der euklidischen Abstände

$$\sum_{i=1}^{k} \|x - p^{(i)}\|_2^2 \;=\; \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{N} \left( x_j - p_j^{(i)} \right)^2$$

minimiert.

**Aufgabe 8:** Stelle den Laplace-Operator

$$\Delta : C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}) \to C(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}), \quad f \mapsto \operatorname{trace} \mathrm{D}^2 f$$

in Polarkoordinaten dar.

*Freiwilliger Zusatz:* Wie lautet die Polarkoordinaten-Darstellung auf $C^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$?