Übungen

Analysis III

Bernold Fiedler, Stefan Liebscher

Abgabe: Donnerstag, 20.11.2003

Aufgabe 9: Die Höchstmaße für sperrige Pakete (quaderförmige Sendungen) sind laut der Service-Informationen der Post: „Länge höchstens 200 Zentimeter, Länge plus größter nicht in Längsrichtung gemessener Umfang zusammen maximal 360 Zentimeter.“

Bestimme das Paket mit dem größten Volumen, das die Höchstmaße der Post nicht überschreitet.

Freiwilliger Zusatz: Ende des letzten Jahrtausends hieß die Regel noch „Länge höchstens 200 Zentimeter, Länge plus größter nicht in Längsrichtung gemessener Umfang zusammen maximal 450 Zentimeter“. Wie schlimm hat uns der „Niedergang der Zeit“ erwischt?

Aufgabe 10: Plotte z.B. mit Mathematica für die Funktion $H : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$$H(x, y, z) = y + z^3 - xz$$

aus verschiedenen Perspektiven die Niveaumenge $H^{-1}(0)$. Bestimme die Menge $C \subset H^{-1}(0)$ der Punkte, in denen sich $H^{-1}(0)$ nicht lokal als Fläche in der Form $z = h(x, y)$ schreiben lässt. Projiziere C in die Koordinatenebenen.

Aufgabe 11: Seien A, B symmetrische $(N \times N)$-Matrizen, B sei regulär. Sei ferner $c \neq 0$ eine reelle Konstante. Betrachte die quadratischen Formen

$$f, g \,:\, \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}, \qquad f(z) = z^{\mathrm{T}} A z, \quad g(z) = z^{\mathrm{T}} B z.$$

(i) Was kannst Du über die lokalen Extrema von f auf der Menge $\{z \mid g(z) = c\}$ aussagen?

(ii) Wo nimmt f sein Min/Maximum auf der Einheitssphäre $S^N = \{z \mid z^{\mathrm{T}} z = 1\}$ an?

Aufgabe 12: Es seien X, Y Banachräume und $f \in C^{n+1}(U, Y)$ mit $U \subset X$ offen. Weiter gelte $[x_0, x_0 + h] \;=\; \{x_0 + \tau h \mid 0 \leq \tau \leq 1\} \;\subset\; U$.

(i) Es sei $Y = \mathbb{R}$. Zeige, dass dann gilt

$$f(x_0 + h) \;=\; \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0) h^{(k)} + \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_0 + \delta h) h^{(n+1)}$$

mit $0 < \delta < 1$ (Lagrange-Form des Restgliedes).

(ii) Es sei $f \in C^n(U, Y)$. Zeige:

$$f(x_0 + h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0) h^{(k)} + o(|h|^n).$$