Übungen

Analysis III

Bernold Fiedler, Stefan Liebscher

Abgabe: Donnerstag, 27.11.2003

Aufgabe 13: Seien $X \subset \mathbb{R}^m$ und $Y \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f \in C^0(\overline{X \times Y}, \mathbb{R}) \cap C^1(X \times Y, \mathbb{R})$. Es existiere eine Funktion $\xi \in C^1(X, Y)$, so dass

$$m(x) \;:=\; \min_{y \in \overline{Y}} f(x,y) \;=\; f(x, \xi(x))$$

für alle $x \in X$ gilt. Zeige, dass m differenzierbar ist, und bestimme ∇m.

Aufgabe 14: Auf dem Funktionenraum $C^\infty(X, \mathbb{R}^m)$, $X \subseteq \mathbb{R}^m$ offen, ist die Lie-Klammer definiert durch

$$[f,g](x) = \mathrm{D}f(x) \cdot g(x) - \mathrm{D}g(x) \cdot f(x).$$

Zeige:

(i) $[\,\cdot\,,\,\cdot\,] : C^\infty(X, \mathbb{R}^m) \times C^\infty(X, \mathbb{R}^m) \to C^\infty(X, \mathbb{R}^m)$ ist bilinear und antisymmetrisch.

(ii) Für alle $f, g, h \in C^\infty(X, \mathbb{R}^m)$ gilt die Jacobi-Identität:

$$[[f,g],h] + [[g,h],f] + [[h,f],g] \;=\; 0.$$

Aufgabe 15: Es sei $f \in C^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Für zwei Quader $Q_i \subset \mathbb{R}^n$, $i = 1, 2$ gelte

$$\mathrm{supp}(f) \subset Q_i, \qquad i = 1, 2.$$

Zeige, dass dann gilt

$$\int_{Q_1} f(x)\mathrm{d}x \;=\; \int_{Q_2} f(x)\mathrm{d}x,$$

d.h. $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\mathrm{d}x = \int_Q f(x)\mathrm{d}x$ mit $\mathrm{supp}(f) \subset Q$ ist unabhängig vom konkret gewählten Quader Q.

Aufgabe 16: Bestimme das Volumen folgender Mengen unter Benutzung der rekursiven Definition des Integrals im $\mathbb{R}^n$ aus der Vorlesung.

(i) Kugel: $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.

(ii) Ellipsoid: $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1\}$.