Übungen

Analysis III

Bernold Fiedler, Stefan Liebscher

Abgabe: Donnerstag, 4.12.2003

Aufgabe 17:

(i) Es seien $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ oberhalb stetig und $\lambda \in [0, +\infty)$. Sind dann die Funktionen

$$f + g, \quad f - g, \quad \lambda f, \quad f \cdot g, \quad f/g,$$

dort wo sie definiert sind, oberhalb stetig?

(ii) Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ oberhalb stetig und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig. Sind dann die Funktionen

$$f \circ g \quad \text{beziehungsweise} \quad g \circ f$$

wieder oberhalb stetig?

Aufgabe 18: Es sei $f : U \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion. Die offene Menge U enthalte einen Quader $Q = [\alpha, \beta] \times [a, b] \subset U$. Die beiden Funktionen $\psi_i : [\alpha, \beta] \to [a, b]$ mit $i = 1, 2$ seien stetig differenzierbar. Definiere die Funktion

$$F : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}, \qquad F(x) = \int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} f(x, y)\, \mathrm{d}y.$$

Zeige, dass dann gilt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F(x) = \int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} \frac{\partial}{\partial x} f(x, y)\, \mathrm{d}y - \psi_1'(x)\, f(x, \psi_1(x)) + \psi_2'(x)\, f(x, \psi_2(x)).$$

Seien $a, x_0 \in \mathbb{R}$, $f \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Zeige, dass

$$x(t) := \mathrm{e}^{at} x_0 + \int_0^t \mathrm{e}^{a(t-s)} f(s)\, \mathrm{d}s$$

eine Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{array}{rcl} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} x(t) & = & ax + f, \\ x(0) & = & x_0 \end{array}$$

darstellt.

Aufgabe 19: Sei $f \in C_c^0([a,b], \mathbb{R}_+)$ stetig und positiv. Zeige, dass dann gilt:

$$\left(\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_a^b \frac{1}{f(x)}\,\mathrm{d}x\right) \;\geq\; (b-a)^2.$$

Hinweis: Bringe die linke Seite auf die Form

$$\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2}\left(\frac{f(x)}{f(y)} + \frac{f(y)}{f(x)}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Aufgabe 20: [vgl. Forster] Zeige, dass sich jede Matrix $A \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ als endliches Produkt von Matrizen

$$^k B_{a_1,\ldots,a_n} \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{k-1} & a_k & a_{k+1} & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(d.h. Einheitsmatrizen mit einer geänderten Zeile) darstellen lässt.

Sei nun $f \in C_c^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ und A eine invertierbare Matrix. Beweise den Substitutionssatz

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(y)\,\mathrm{d}y \;=\; \int_{\mathbb{R}^n} f(Bx)\,|\det B|\,\mathrm{d}x$$

für die speziellen Matrizen $^k B_{a_1,\ldots,a_n}$ und dadurch auch für die allgemeine invertierbare lineare Abbildung A.

Hinweis: Ein möglicher Weg ist es, zunächst Dreiecksmatrizen als Produkt von Matrizen des obigen Typs darzustellen und z.B. das Gaußsche Eliminationsverfahren zu nutzen, um eine Dreiecksmatrix zu erhalten.