Übungen

Analysis III

Bernold Fiedler, Stefan Liebscher

Abgabe: Donnerstag, 18.12.2003

Aufgabe 21: Es sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ unterhalb stetig und $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt. Zeige oder widerlege die folgenden Aussagen:

(i) Es gibt ein $x_0 \in K$ mit $f(x_0) = \sup\{f(x) \,|\, x \in K\}$, d.h. f nimmt sein Maximum an.

(ii) Es gibt ein $x_1 \in K$ mit $f(x_1) = \inf\{f(x) \,|\, x \in K\}$, d.h. f nimmt sein Minimum an.

Aufgabe 22: Sei $f_i \in \mathcal{H}^{\uparrow}$, $i \in I$, eine monoton steigende Folge halbstetiger Funktionen für eine geordnete Indexmenge I. Zeige:

$$\sup_{i\in I} \int f_i \;=\; \int \sup_{i\in I} f_i .$$

Aufgabe 23: Gegeben seien 2 identische (genügend lange) Zylinder im R^3, deren Längsachsen sich unter einem rechten Winkel schneiden. Bestimme das Volumen der Schnittmenge beider Zylinder.

Freiwilliger Zusatz: Betrachte den allgemeinen Fall von n identischen Zylindern, deren Längsachsen in einer gemeinsamen Ebene liegen und sich in einem gemeinsamen Punkt schneiden. Dabei sollen benachbarte Achsen den gleichen Winkel $2\pi/n$ bilden. Bestimme das Volumen der Schnittmenge aller Zylinder.

Aufgabe 24: [vgl. Forster] Betrachte den Raum

$$C_{2\pi}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \;=\; \{f \in C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \;\mid\; \forall x \in \mathbb{R}^n, \forall k \in \mathbb{Z}^n \;:\; f(x) = f(x + 2\pi k)\}$$

der stetigen, gitter-periodischen Funktionen auf $\mathbb{R}^n$. Zeige, dass die durch

$$I(f) \;=\; \int_0^{2\pi} \left(\cdots \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^{2\pi} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, \mathrm{d}x_1 \right) \mathrm{d}x_2 \right) \cdots \right) \mathrm{d}x_n$$

definierte Abbildung $I : C_{2\pi}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ monoton, linear und translationsinvariant ist.

Freiwilliger Zusatz: Gibt es noch andere Abbildungen $\tilde{I}$ mit diesen Eigenschaften?