Übungen

Analysis III

Bernold Fiedler, Stefan Liebscher

Abgabe: Donnerstag, 15.01.2004

Aufgabe 25: Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine C^1-Untermannigfaltigkeit der Dimension $n-1$. Zeige, dass sich M lokal nahe $a \in M$ als Graph $h : T_aM \to \mathbb{R}$ über dem Tangentialraum schreiben lässt.

Aufgabe 26: Die Mercator-Projektion $P : S^2 \setminus \{N, S\} \to Z$ nach G. Mercator (1512-1594) bildet die Einheitserde S^2 (bis auf den Nordpol N und den Südpol S) auf den Zylinder $Z = S^1 \times \mathbb{R}$ ab, der die Erde am Äquator berührt. Koordinaten auf S^2 sind hier die geographische Länge $\phi \in [0, 2\pi)$ und die geographische Breite $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$.

Die Projektion hat die Form $P(\phi, \theta) = (\phi, p(\theta))$ mit $p(0) = 0$. Bestimme $p : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$, so dass P winkeltreu ist.

(i) Bestimme konkret die Abstände l zwischen Breitenkreis x Grad nördlicher Breite und dem Äquator für

$$x \in \{10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80\}$$

Vergleiche die Ergebnisse mit folgenden Werten, die von einer Orginalkarte Mercators stammen. (1567, ca. 100 Jahre vor Newton)

x	10	20	30	40	50	60	70	80
l/mm	55	112	172	238	314	407	534	749

(ii) Folgere, dass Bilder von sogenannten Loxodromen, d.h. Kurven auf der Sphäre, die alle Längenkreise unter dem gleichen Winkel schneiden, Geraden auf Z sind. Deshalb sind die Mercator-Karten für die Seefahrt von großer Bedeutung. Sie ermöglichen die Navigation per Lineal (z.B. in Piratenfilmen).

Aufgabe 27: Sei M eine C^1-Untermannigaltigkeit der Dimension zwei des $\mathbb{R}^3$. Sei A eine affine Ebene in $\mathbb{R}^3$, so dass $A \cap M = \{x\}$ aus genau einem Punkt besteht. Zeige, dass dann $A = x + T_xM$.

Aufgabe 28: Bestimme die Länge der folgenden Kurven bzw. Kurvenstücke in $\mathbb{R}^2$

(i) $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\}$ mit $a, b > 0$ (Ellipse).

(ii) $L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) = 0\}$ mit $a > 0$ (Lemniskate).

(iii) $T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \log x,\ a < x < b\}$ mit $0 < a < b < \infty$.

Hinweis: Schlage ggf. unter dem Stichwort „elliptische Integrale“ in einer Formelsammlung nach. Eine geeignete Parametrisierung der Lemniskate gewinnt man z.B. in Polarkoordinatendarstellung durch Wahl des Parameters $t = \cos(2\varphi)$.