Übungen

Analysis III

Bernold Fiedler, Stefan Liebscher

Abgabe: Donnerstag, 22.01.2004

Aufgabe 29: Es sei $K \subset \mathbb{R}^N$ ein kompaktes C^1 Gebiet mit äußerer Normalen n. Ferner seien $u, v \in C^2(U, \mathbb{R})$ auf einer offenen Umgebung U von K gegeben. Definiere

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x) \;=\; \nabla u(x) \cdot n(x)$$

Zeige, dass dann die Greenschen Formeln gelten

$$\text{(a)} \qquad \int_K v\, \Delta u \,\mathrm{d}x \;=\; -\int_K \sum_{i=1}^N u_{x_i} v_{x_i} \,\mathrm{d}x + \int_{\partial K} v \frac{\partial u}{\partial n} \,\mathrm{d}S,$$

$$\text{(b)} \qquad \int_K v\, \Delta u \,\mathrm{d}x \;=\; \int_K u\, \Delta v \,\mathrm{d}x + \int_{\partial K} \left(v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} \right) \mathrm{d}S.$$

Aufgabe 30: Sei $\alpha(s)$, $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ eine nach der Bogenlänge parametrisierte C^2-Kurve in $\mathbb{R}^2$, mit $\ddot{\alpha}(0) \neq 0$. Zeige, dass von allen Kreisen der Krümmungskreis,

$$\text{Mittelpunkt: } \alpha(0) + \frac{\ddot{\alpha}(0)}{|\ddot{\alpha}(0)|^2}, \qquad \text{Radius: } \frac{1}{|\ddot{\alpha}(0)|},$$

derjenige ist, der die Kurve am besten lokal (nahe 0) approximiert.

Freiwilliger Zusatz: Was passiert im Falle $\ddot{\alpha}(0) = 0$?

Aufgabe 31: Sei $\alpha(s)$ eine C^2-Kurve in $\mathbb{R}^2$, parametrisiert nach der Bogenlänge. Zeige, dass man jeden Punkt einer Umgebung von α eindeutig in der Form $\alpha(s) + tn(s)$, $t \in (-\varepsilon(s), \varepsilon(s))$ schreiben kann. Hierbei ist $n(s)$ die Einheitsnormale an α im Punkt $\alpha(s)$.

Freiwilliger Zusatz: Bezeichne

$$\eta(s) \;=\; \alpha(s) + \frac{\ddot{\alpha}(s)}{|\ddot{\alpha}(s)|^2},$$

die Kurve der Krümmungskreismittelpunkte oder *Evolute* von α. (Der Einfachheit halber nehmen wir an, dass stets $\ddot{\alpha}(s) \neq 0$ gilt.) Sei N das Gebiet zwischen den beiden Kurven α und η. Zeige, dass man die obigen Koordinaten im gesamten Inneren von N einführen kann, aber nicht jenseits der Evolute.

Aufgabe 32: Beschreibe die Bahn eines Punktes auf dem Rand eines Einheitskreises, der ohne Schlupf auf der x-Achse der (x, y)-Ebene abrollt. Kurven dieser Form heißen Zykloiden.

Zeige, dass die Evolute (die Kurve der Krümmungskreismittelpunkte, siehe vorige Aufgabe) einer Zykloide wieder eine Zykloide ist.