Übungen

Analysis III

Bernold Fiedler, Stefan Liebscher

Abgabe: Donnerstag, 29.01.2004

Aufgabe 33: Es sei $f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ mit $|f(x)| \to \infty$ für $|x| \to \infty$. Weiter sei $g \in C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Das beschränkte Intervall $[a, b]$ bestehe nur aus regulären Werten von f. Zeige, dass dann gilt

$$\int\limits_{\{x \,|\, a<f(x)<b\}} g \, \mathrm{d}x \;=\; \int\limits_a^b \left(\int_{f^{-1}(c)} g \, \|\nabla f\|^{-1} \, \mathrm{d}S \right) \mathrm{d}c.$$

Aufgabe 34: Sei $\mathrm{div} F > 0$ innerhalb einer Umgebung des Einheitsballs $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$. Zeige, dass F nicht überall tangential an die Oberfläche der Sphäre $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ sein kann. Gib eine physikalische Interpretation.

Aufgabe 35: Seien $f, g \in C^2(U, \mathbb{R}^3)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ und $u \in C^2(U, \mathbb{R})$. Dabei sei $U \subset \mathbb{R}^3$ eine offene Menge. Zeige

(i) $\mathrm{rot}\,(\lambda f + \mu g) \;=\; \lambda \,\mathrm{rot}\, f + \mu \,\mathrm{rot}\, g$,

(ii) $\mathrm{rot}\,(u f) \;=\; u \,\mathrm{rot}\, f + (\mathrm{grad}\, u) \times f$,

(iii) $\mathrm{rot}\,\mathrm{grad}\, u \;=\; 0$,

(iv) $\mathrm{div}\,\mathrm{rot}\, f \;=\; 0$,

(v) $\mathrm{rot}\, f^A \;=\; (\mathrm{rot}\, f)^A$,
wobei $A \in SO(3)$ eine orthogonale Matrix und $f^A(x) = A^{-1} f(Ax)$.

Aufgabe 36: Sei $f \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ mit $\mathrm{rot}\, f = 0$. Zeige, dass sich f als Gradient einer C^1-Funktion $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ schreiben lässt:

$$f \;=\; \mathrm{grad}\, \varphi.$$

Hinweis: Definiere φ durch (ein) geeignete(s) Wegintegral(e). Zeige dann, dass φ wohldefiniert ist bzw. der Gradient das gesuchte Vektofeld liefert.