Übungen

Analysis III

Bernold Fiedler, Stefan Liebscher

Abgabe: Donnerstag, 05.02.2004

Aufgabe 37: Die orientierte C^1-Fläche $S \subset \mathbb{R}^3$ sei global durch eine Karte φ über einem offenen Gebiet $D \subset \mathbb{R}^2$ parametrisiert.

$$\varphi : \ D \to S, \qquad (u,v) \mapsto (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)(u,v),$$

Es sei $n : S \to \mathbb{R}^3$ die zur Fläche gehörige Normale. Außerdem sei ein stetiges Vektorfeld $f = (f_1, f_2, f_3) \in C(S, \mathbb{R}^3)$ gegeben. Zeige:

$$\begin{aligned}
&\int_S f \cdot n \, \mathrm{d}S \\
&\quad = \int_D \left((f_1 \circ \varphi) \cdot \det \frac{\partial(\varphi_2, \varphi_3)}{\partial(u,v)} + (f_2 \circ \varphi) \cdot \det \frac{\partial(\varphi_3, \varphi_1)}{\partial(u,v)} + (f_3 \circ \varphi) \cdot \det \frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2)}{\partial(u,v)} \right) \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v \\
&\quad = \int_D (f \circ \varphi) \cdot (\partial_u \varphi \times \partial_v \varphi) \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v.
\end{aligned}$$

Bemerkung: Im Differentialformenkalkül formuliert, ist also nachzurechnen, dass für die alternierende 2-Form $\omega = f_1 \, \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3 + f_2 \, \mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}x_1 + f_3 \, \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2$ die zurückgeholte Form „korrekt definiert“ ist:

$$\int_S \omega \ = \ \int_D \varphi^* \omega.$$

Aufgabe 38: Bestimme das Oberflächenintegral

$$\int_{S^2} f \cdot n \, \mathrm{d}S, \qquad \text{mit} \qquad f(x,y,z) \ = \ \begin{pmatrix} y^3 \\ z^3 \\ x^3 \end{pmatrix},$$

über der Einheitssphäre $S^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ mit äußerer Normalen n.

Aufgabe 39: Gib eine Parametrisierung eines im $\mathbb{R}^3$ eingebetteten Möbiusbands an.

Sei ∂M eine Drahtschleife, die ein solches im $\mathbb{R}^3$ eingebettetes Möbiusband M berandet. Entscheide, ob im allgemeinen ein sich zeitlich änderndes Magnetfeld einen Strom im Draht bewirken kann.

Aufgabe 40: Es sei $N \subset \mathbb{R}^n$ eine Lebesgue-Nullmenge. Zeige:

$$\forall\, \epsilon > 0 \ \ \exists\, U \subset \mathbb{R}^n \text{ offen, so dass} \qquad N \subset U \text{ und } \mathrm{Vol}\,(U) < \epsilon.$$