Übungen

Analysis III

Bernold Fiedler, Stefan Liebscher

Abgabe: Donnerstag, 12.02.2004

Aufgabe 41: Wir wollen eine Menge $V \subset [0,1) \subset \mathbb{R}$ konstruieren, deren charakteristische Funktion χ_V nicht Lebesgue-integrierbar ist.

Definiere dazu die folgende Äquivalenzrelation auf $\mathbb{R}$:

$$x \simeq y \quad \Longleftrightarrow \quad x - y \in \mathbb{Q}.$$

Das Auswahlaxiom der Mengenlehre postuliert die Existenz eines Vertretersystems: sei also $V \subset [0,1)$ eine Menge, die aus jeder Äquivalenzklasse der zuvor definierten Relation genau einen Vertreter enthält.

Ferner sei $(r_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine Abzählung der rationalen Zahlen im Intervall $[0,1)$. Definiere die translatierten Mengen

$$V_j \;=\; \{x \in [0,1) \mid \exists n \in \mathbb{Z} : \, x - r_j + n \in V\} \;=\; V + r_j \pmod 1, \qquad j \in \mathbb{N}.$$

(i) Zeige, dass die Mengen V_j paarweise disjunkt sind.

(ii) Zeige, dass $[0,1) = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} V_j$.

(iii) Zeige, dass die charakteristische Funktion

$$\chi_V(x) \;=\; \begin{cases} 1 & \text{für } x \in V \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

nicht Lebesgue-integrierbar ist.

Bemerkung: Diese Konstruktion einer nicht Lebesgue-integrierbaren Funktion zeigt insbesondere, dass hier keine Unzulänglichkeit unseres Integralbegriffs vorliegt. Allein die (gewünschte) Translationsinvarianz und Additivität des Integrals liefern (unter Annahme des Auswahlaxioms) notwendig die Existenz nicht-integrierbarer Funktionen.

Aufgabe 42: Seien $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Beweise oder widerlege folgende Aussagen:

(i) $f, g \in \text{Leb} \implies \max(f,g) \in \text{Leb}$

(ii) $f, g \in \text{Leb} \implies \min(f,g) \in \text{Leb}$

(iii) $|f| \in \text{Leb} \implies f \in \text{Leb}$

Hinweis: min, max und $|\cdot|$ hängen voneinander ab.

Aufgabe 43: Sei $(f_n) \in \text{Leb}$, $n \in \mathbb{N}$, eine Folge integrierbarer Funktionen mit $f_n \geq 0$ fast überall. Weiter gelte für alle n: $\int f_n \leq c < \infty$. Zeige, dass dann gilt

$$f = \liminf_{n\to\infty} f_n \in \text{Leb}$$

und

$$\int f \leq \liminf_{n\to\infty} \int f_n.$$

Aufgabe 44: Es sei im weiteren $1 \leq p, q < \infty$. Für eine Funktion

$$f \in \mathcal{L}^p = \left\{ g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \,\middle|\, x \mapsto |g(x)|^p \text{ ist Lebesgue-integrierbar} \right\}$$

gelte

(a) f ist beschränkt, beziehungsweise

(b) $\text{supp}(f) \subset V$ und $\text{Vol}(V) < \infty$.

Beweise oder widerlege jeweils

(i) $f \in \mathcal{L}^q$, für $q > p$, beziehungsweise

(ii) $f \in \mathcal{L}^q$, für $q < p$.