Zusatzübungen

Analysis III

Bernold Fiedler, Stefan Liebscher

Abgabe: Dienstag, 02.12.2003

Aufgabe Z1: Bestimme die Ableitungen (im Banachraum!) folgender Abbildungen

(i) $\Phi : BC^2(\mathbb{R},\mathbb{R}) \times BC^0(\mathbb{R},\mathbb{R}) \longrightarrow BC^0(\mathbb{R},\mathbb{R}), \qquad (g,f) \longmapsto g \circ f$

(ii) $\Psi : BC^2(\mathbb{R},\mathbb{R}) \longrightarrow BC^0(\mathbb{R},\mathbb{R}), \qquad f \longmapsto f \circ f$

Dabei bezeichnen BC^0 und BC^k die Banachräume der beschränkten stetigen Funktionen bzw. der beschränkten Funktionen mit k beschränkten und stetigen Ableitungen.

Ist Ψ aufgefasst als Abbildung $BC^2(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to BC^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ ebenfalls differenzierbar?

Aufgabe Z2: Berechne die Taylor-Entwicklung folgender Funktionen in (x, y) bis zum zweiten Grad:

(i) x^2y^2 bei $(1,1)$

(ii) x^4y^3 bei $(2,-1)$

(iii) $\sin(xy)$ bei $(0,0)$

(iv) $\exp(xy)$ bei $(0,0)$

(v) x^y bei $(1,0)$

(vi) x^y bei $(1,1)$

(vii) $\cos(x+y)$ bei $(0,\pi/2)$

(viii) $1+xy$ bei $(1,1)$

Aufgabe Z3: Bestimme jeweils die Ableitung $\mathrm{d}w/\mathrm{d}t$ mit der Kettenregel:

(i) $w = x^2 + y^2$,
$x = 1 + t^2$, $y = t^3$

(ii) $w = y^3 - x^3$,
$x = t/(1+t)$, $y = 1/(1+t)$

(iii) $w = 2x^2 - 3xy + 6y^3$,
$x = \cos(t)$, $y = \exp(t)$

(iv) $w = \log(x+y)$,
$x = \exp(-2t)$, $y = t^3 - t^2$

(v) $w = xy^2z^3$,
$x = \sin(t)$, $y = \cos(t)$, $z = 1+\exp(2t)$

(vi) $w = x^2 - y\tan(z)$,
$x = \sin^2(t)$, $y = \cos(t)$, $z = 4t$

(vii) $w = x/y + y/z$,
$x = t$, $y = \cos(t)$, $z = \exp(t)$

(viii) $w = x^2y^3z$,
$x = t$, $y = t+1$, $z = 1-t$

Aufgabe Z4: Bestimme das maximale Volumen eines in ein Ellipsoid

$$x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 \;=\; 1$$

einbeschriebenen Quaders.

Aufgabe Z5: Klassifiziere die kritischen Punkte von

$$(x, y) \longmapsto x^3 - y^3 + 3\alpha xy$$

in Abhängigkeit von α nach Maximum, Minimum, Sattelpunkt.

Aufgabe Z6: Zeige, dass

$$u(x,t) \;=\; \frac{1}{\sqrt{t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4kt}\right)$$

die (eindimensionale) Wärmeleitungsgleichung löst:

$$\frac{\partial}{\partial t} u \;=\; k \frac{\partial^2}{\partial x^2} u.$$

Aufgabe Z7: Zeige, dass das explizit durch

$$u(t,x) \;=\; v(x - st) \;=\; \frac{s}{2} \operatorname{sech}^2\left(\frac{\sqrt{s}}{2}(x - st)\right)$$

gegebene Soliton eine Lösung der Korteweg-de-Vries-Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} u + 6u \frac{\partial}{\partial x} u + \frac{\partial^3}{\partial x^3} u \;=\; 0$$

darstellt.

(Der Sekans hyperbolicus ist definiert durch $\operatorname{sech}(z) = 1/\cosh(z) = 2/(\mathrm{e}^z + \mathrm{e}^{-z})$.)