Uneingeschränkt freiwillige Zusatzübungen
(für all jene, die mit den weihnachtlichen Vor- und Nacharbeiten nicht ausgelastet sind)

Analysis III

Bernold Fiedler, Stefan Liebscher

Abgabe: 8.1.2004

Aufgabe W1: Sei

$$F(x,y) \;=\; 2x^4 + y^3 + py - q, \qquad \text{mit } p,q > 0.$$

Für hinreichend kleine $|x|$ lässt sich die Gleichung $F(x,y) = 0$ durch positive $y(x)$ auflösen. Berechne $y'(x)$, ohne $y(x)$ explizit auszurechnen.

Aufgabe W2: Seien X, Y Banachräume, $U \subset X$ offen und konvex. Sei $f : U \to Y$ differenzierbar mit $Df(x) = 0$ für alle $x \in U$. Zeige, dass f auf U konstant ist. Genügt es, dass U offen und zusammenhängend ist?

Aufgabe W3: Welche Punkte auf der Einheitskugel

$$S^{n-1} \;=\; \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_2^2 = 1 \right\}$$

in $\mathbb{R}^n$ minimieren bzw. maximieren die p-Norm, $1 < p < \infty$?

$$\|x\|_p \;=\; \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

Aufgabe W4: Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ unterhalb stetig und konvex. Weiter gelte

$$D(f) \;=\; \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) < +\infty\} \;\neq\; \emptyset.$$

(i) Zeige, dass dann auch die Legendre-Transformierte von f

$$f^* : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}, \qquad f^*(y) \;=\; \sup_{x \in D(f)} \left(\langle y, x \rangle - f(x) \right)$$

unterhalb stetig und konvex ist.

(ii) Zeige, dass $D(f^*) \neq \emptyset$ ist.

In der Physik heißt die Legendre-Transformierte der Lagrange-Funktion $L(t,u,p)$ bezüglich p die zugehörige Hamilton-Funktion H.

Aufgabe W5: Sei $f : Q \to \mathbb{R}$ stetig auf dem Quader Q. Zusätzlich gelte $f \geq 0$ in Q und $\int_Q f = 0$. Zeige $f \equiv 0$ auf Q.

Aufgabe W6: Betrachte die folgenden Funktionen $f_i : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3$:

$$\begin{aligned} f_1 &= z^2 - x^2 - y^4 - 1, \\ f_2 &= z - x^3 - x^2 + y^2, \\ f_3 &= x^2 + zy^2 - x^2 y. \end{aligned}$$

Plotte (z.B. mit Mathematica: ParametricPlot3D) für jedes der f_i die Niveaumengen $f_i^{-1}(0) \subset \mathbb{R}^3$. Untersuche die Flächen nach lokalen Extrema in z-Richtung.

Aufgabe W7:

(i) Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion auf dem kompakten Intervall $[a, b]$. Bestimme das Volumen des Rotationskörpers in $\mathbb{R}^3$, der entsteht, wenn man den Graphen von f um die Abszissen-Achse dreht.

(ii) Bestimme das Volumen des dreidimensionalen Volltorus

$$\left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x^2 + \left(2 - \sqrt{y^2 + z^2}\right)^2 \leq 1 \right\}.$$

Aufgabe W8: Bestimme den Schwerpunkt des „Tellers“ konstanter Dichte

$$\left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x^2 + y^2 \leq 1,\ z \leq 0,\ x^2 + y^2 + (z - 2)^2 \leq \frac{25}{4} \right\}.$$

Aufgabe W9: Gegeben sei eine stetige Funktion $f : [0, b] \to \mathbb{R}$ mit $b > 0$. Definiere die Funktionen $F_n : [0, b] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{R}$,

$$F_0(x) = \int_0^x f(y)\,\mathrm{d}y, \qquad F_n(x) = \int_0^x \frac{(x - y)^n}{n!} f(y)\,\mathrm{d}y.$$

Zeige, dass dann gilt

$$F_n(x) = \int_0^x \int_0^{x_n} \ldots \int_0^{x_1} f(y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n.$$

Berechne das Volumen der Menge $\{x \in \mathbb{R}^n \mid 0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n \leq 1\}$.

Aufgabe W10: Beschreibe die Funktionsweise einer mechanischen Computer-Maus. Dazu empfiehlt es sich, die Maus zu öffnen.

Wie wird aus den in der Maus gemessenen Daten die Bewegung der Maus zurückgerechnet? Was passiert, wenn man die Maus um die Mittelachse der Kugel dreht?

Hinweis: Vergiss nicht, die Maus wieder zusammenzubasteln!

Frohe Weihnachten, einen guten Rutsch und ein gesundes, friedliches Jahr 2004!