Uneingeschränkt freiwillige Zusatzübungen
(für all jene, die auch zukünftig der Mathematik treu bleiben wollen)

Analysis III

Bernold Fiedler, Stefan Liebscher

keine Abgabe,

aber die TutorInnen, AssistentInnen und ProfessorInnen
stehen für eine Diskussion der Lösungen zur Verfügung.

Aufgabe F1: Sei X ein Hilbertraum mit Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Definiere eine Abbildung

$$F : C^1(X,X)^3 \times X \longrightarrow X, \qquad F(\chi,\varphi,\rho,x) \;=\; \Big\langle \chi(\varphi(x)), \chi(\rho(x)) \Big\rangle.$$

Bestimme die ggf. partiellen Ableitungen von F.

Aufgabe F2: Zeige, dass die Einheitssphäre in $\mathbb{R}^3$

$$S^2 \;=\; \Big\{ (x_1,x_2,x_3) \;\Big|\; x_1^2+x_2^2+x_3^2 = 1 \Big\} \;\subset\; \mathbb{R}^3$$

eine C^1-Untermannigfaltigkeit der Dimension zwei ist. Benutze als Karten die Umkehrungen der stereographischen Projektionen $\phi_{N,S} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} \phi_N(x_1,x_2) &= \frac{2}{x_1^2+x_2^2+1}(x_1,x_2,-1) + (0,0,1), \\ \phi_S(x_1,x_2) &= \frac{2}{x_1^2+x_2^2+1}(x_1,x_2,1) + (0,0,-1). \end{aligned}$$

Bestimme die Kartenwechsel für diese beiden Karten. Verwende dazu möglichst elementargeometrische Argumente.

Zusatz: Was sind die Bilder von Geraden und Kreisen unter dem Kartenwechsel?

Aufgabe F3: Wie weit muss man eine Bierflasche (Milchflasche, Cola-Dose etc.) austrinken, damit sie möglichst stabil steht?

Hinweis: Die Höhe des Schwerpunktes

$$\left(\int_{\mathbb{R}^3} \rho(x)\,\mathrm{d}x \right)^{-1} \int_{\mathbb{R}^3} x\,\rho(x)\,\mathrm{d}x$$

soll also minimiert werden! Hierbei ist ρ die Dichte, die für übliche irdische Gefäße und Flüssigkeiten in selbigen einen beschränkten Träger hat. Die leere Flasche soll dabei eine Masse m und eine Schwerpunktshöhe h haben (die man normieren kann). Die Form der Flasche kann als zylindrisch angenommen werden.

Zusatz: Was passiert für ganz leichte Gefäße, $m \to 0$, bei konstanter Form resp. Schwerpunktshöhe?

Aufgabe F4: Gegeben sei ein Rechteck $(A_1, A_2, A_3, A_4) \subset \mathbb{R}^2$. Bestimme zwei Punkte $X, Y \in \mathbb{R}^2$, so dass die Abstandssumme

$$\|X - Y\| + \sum_{k=1}^{4} \min\{\|A_k - X\|, \|A_k - Y\|\}$$

minimal wird.

Zusatz: Wie steht's mit einem allgemeinen Viereck?

Aufgabe F5: [Huygens, 1629-1695] Auf welcher Kurve muss ein Pendel schwingen, damit seine Periode nicht von der Amplitude abhängt?

Hinweis: Betrachte ein idealisiertes Pendel unter Vernachlässigung von Reibungseffekten in einem konstanten Schwerefeld $\overrightarrow{g} = (0, -g)^{\mathrm{T}}$. Sei $\alpha(s) = (x(s), y(s))^{\mathrm{T}}$ die auf Bogenlänge parametrisierte Kurve, auf die die an einem masselosen Faden aufgehängte Punktmasse m eingeschränkt ist, $\alpha(0)$ sei die stabile Ruhelage. (Solch eine Bahnkurve ist z.B. zu erreichen, indem der Fadenlauf an seinem Aufhängepunkt durch die Evolute β von α eingeschränkt wird.)

Die Physik lehrt uns nun, dass der Massepunkt durch das Schwerefeld beschleunigt wird:

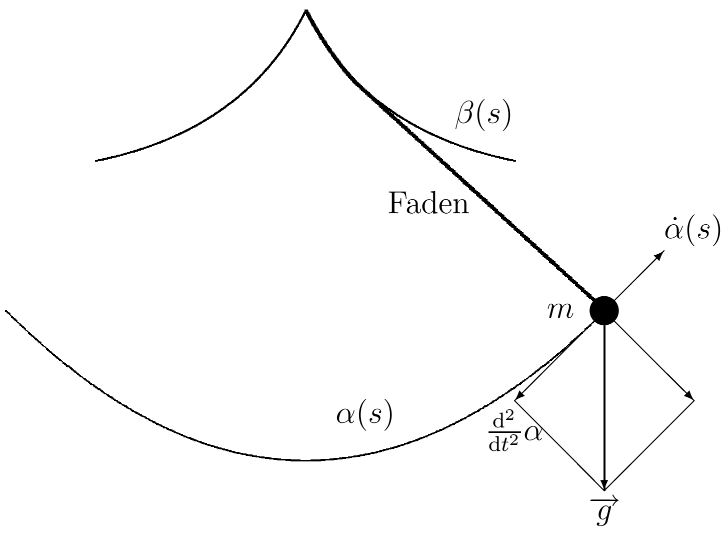
$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} s \;=\; \overrightarrow{g} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\alpha(s) \;=\; -g\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} y(s).$$

Die Periode der entstehenden Schwingung ist von der Auslenkung unhabhängig, falls andererseits

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} s \;=\; -cs$$

für irgendeine positive Konstante c gilt, d.h. das Pendel ein harmonischer Oszillator ist.

Dadurch ist die Bahnkurve $\alpha(s)$ (die uns übrigens schon auf einem früheren Aufgabenzettel begegnet ist) festgelegt.



Aufgabe F6: Bestimme das Oberflächenintegral

$$\int_{S^2} f \cdot n \, \mathrm{d}S, \qquad \text{mit} \qquad f(x,y,z) \;=\; \begin{pmatrix} x^3 \\ y^3 \\ z^3 \end{pmatrix},$$

über der Einheitssphäre $S^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2+y^2+z^2 = 1\}$ mit äußerer Normalen n.

Aufgabe F7: Beschreibe die Bahn eines Punktes auf dem Rand eines Einheitskreises, der ohne Schlupf auf einem anderen Einheitskreis abrollt. Diese Kurve wird auch Kardioide (Herzkurve) genannt.

Parametrisiere die Kurve mittels (geeigneter) Polarkoordinaten und bestimme in dieser Parametrisierung die Gesamtlänge der Kurve.

Aufgabe F8: Beweise oder widerlege: Ist $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt so ist der Rand ∂K eine Lebesgue-Nullmenge.

Hinweis: Cantormengen sind kompakt und bestehen nur aus Randpunkten.

Zusatz: Wie steht's mit dem Rand einer offenen Menge in $\mathbb{R}^n$?

Aufgabe F9: Es sei $K \subset \mathbb{R}^N$ ein kompaktes C^1 Gebiet mit äußerer Normalen n. Ferner seien $u, v \in C^2(U, \mathbb{R})$ auf einer offenen Umgebung U von K gegeben. Definiere

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x) \;=\; \nabla u(x) \cdot n(x).$$

Sei nun $V = \mathrm{Int}(K)$ das Innere von K und $f \in C(U, \mathbb{R})$. Die Funktion $u \in C^2(U, \mathbb{R})$ löse die partielle Differentialgleichung

$$\Delta u \;=\; f \qquad \text{auf } V$$

mit den Randbedingungen

(D) $u = 0$ auf ∂K, bzw.

(N) $\partial u / \partial n = 0$ auf ∂K.

Zeige, dass eine solche Lösung im Falle (D) eindeutig und im Falle (N) eindeutig bis auf eine additive Konstante ist.

Hinweis: Greensche Formeln.

Aufgabe F10: Bestimme in Abhängigkeit von $n \in \mathbb{N}$ und $1 \leq p < \infty$ diejenigen $\alpha \in \mathbb{R}$, so dass die Funktion

$$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad f(x) = \|x\|_2^\alpha$$

in $\mathcal{L}^p$ liegt.

Aufgabe F11: Es seien $f \in L^p(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ und $g \in L^q(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ mit $1 \leq p, q < \infty$. Zeige, dass dann die Faltung

$$\big(f * g\big)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y$$

in $L^r(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ liegt, mit

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1.$$

Hinweis: Es gilt

$$|f * g|(x) \leq \int_{\mathbb{R}^n} \Big(|f(x-y)|^{p/r}|g(y)|^{q/r}\Big)\ |f(x-y)|^{p-p/q}\ |g(y)|^{q-q/p}\,\mathrm{d}y.$$

Nutze nun die Hölderungleichung $\|uvw\|_{L^1} \leq \|u\|_{L^\alpha}\,\|v\|_{L^\beta}\,\|w\|_{L^\gamma}$, mit geeigneten Exponenten $1/\alpha + 1/\beta + 1/\gamma = 1$.

Die Mathematik ist eine Art Spielzeug, welches die Natur uns zuwarf zum Troste und zur Unterhaltung in der Finsternis.

(Jean-Baptist le Rond d'Alembert, 1717-1783)