Kernfragen zur Analysis
Differentiation im Banachraum

1. Wann heißt eine Abbildung f zwischen zwei Banachräumen X und Y Fréchet-differenzierbar, wann Gateaux-differenzierbar? Was ist die Ableitung? Ist f dann auch stetig? Was ist die zweite Ableitung?
2. Wie kann die Ableitung von $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ mit Hilfe der partiellen Ableitungen ausgedrückt werden.
3. Wann darf man die Reihenfolge der zweiten partiellen Ableitungen vertauschen?
4. Was sind die erste und zweite Ableitung des Skalarproduktes im Hilbertraum?
5. Was ist der Gradient von $f : x \to \|x\|_2^{-1}$ für $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, wenn $\| \cdot \|_2$ die euklidische Norm auf $\mathbb{R}^n$ bezeichnet?
6. Wie ist die Kettenregel für die Ableitung von $g \circ f$ formuliert?
7. Wie lautet die Darstellung der zweiten Ableitung von $g \circ f$ durch partielle Ableitungen von f und g? Dabei seien $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ zweimal Fréchet-differenzierbar.
8. Sind stetig differenzierbare Funktionen mit beschränkter Linearisierung (global) Lipschitz-stetig? Beweis?
9. Welche der folgenden Aussagen sind richtig, welche falsch ($f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$)?
   - Wenn $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ konvex, dann f stetig.
   - Wenn f partiell differenzierbar, dann f stetig.
   - Wenn f partiell differenzierbar und f stetig, dann f differenzierbar.
   - Wenn f differenzierbar, dann f partiell differenzierbar.
   - Wenn f stetig partiell differenzierbar, dann f stetig differenzierbar.
10. Wie lautet der Satz über implizite Funktionen?
11. Was sind hinreichende Bedingungen, so dass $f : X \to X$ lokal invertierbar ist?
12. Was ist die Ableitung der implizit gegebenen Funktion $x_n(x_1, \ldots, x_{n-1})$, die die Gleichung $\sum_{i=1}^n x_i^2 = 1$ erfüllt?
13. Warum bezeichnet der Gradient einer Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ die „Richtung des steilsten Anstiegs“? Welche Beziehung herrscht zwischen dem Gradient und den Niveauflächen $\{f \equiv \text{const.}\}$ (für $n = 2$ auch Höhenlinien genannt)?
14. Welche notwendigen und welche hinreichenden Bedingungen für die Existenz von Maxima/Minima einer Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ kennst Du?
15. Wo nimmt eine symmetrische quadratische Form ihr Maximum/Minimum auf der Einheitssphäre an? Beweis?
16. Wie lautet die Taylor-Approximation einer Funktion $f \in C^{n+1}(U, Y)$, $U \subseteq X$ offen, in einem Punkt $x_0 \in U$? Welche Darstellungen/Abschätzungen des Restgliedes kennst Du?