Kernfragen zur Analysis
Lebesgue-Integral

1. Definiere das Lebesgue-Integral als Grenzwert von Integralen über halbstetigen Funktionen!

2. Wie kann man die Lebesgue-integrierbaren Funktionen durch Grenzwerte stetiger Funktionen charakterisieren?

3. Welche der folgenden Aussagen sind richtig, welche falsch?
   - Ist $f \in \mathrm{Leb}$, so sind $f^+, f^- \in \mathrm{Leb}$.
   - Ist $f \in \mathrm{Leb}$, so ist $|f| \in \mathrm{Leb}$.
   - Ist $|f| \in \mathrm{Leb}$, so ist $f \in \mathrm{Leb}$.
   - Sind $f, g \in \mathrm{Leb}$, so sind $\max(f, g), \min(f, g) \in \mathrm{Leb}$.

4. Welche Charakterisierungen von Nullmengen kennst Du?

5. Welche der folgenden Aussagen sind richtig, welche falsch?
   - Ist N eine Nullmenge, so ist N abzählbar.
   - Ist N abzählbar, so ist N eine Nullmenge.
   - Ist N_k eine Nullmenge für jedes $k \in \mathbb{N}$, so auch die Vereinigung $\bigcup\{N_k \mid k \in \mathbb{N}\}$.
   - Ist N_k eine Nullmenge für jedes $k \in \mathbb{Q}$, so auch die Vereinigung $\bigcup\{N_k \mid k \in \mathbb{Q}\}$.
   - Ist N_k eine Nullmenge für jedes $k \in \mathbb{R}$, so auch die Vereinigung $\bigcup\{N_k \mid k \in \mathbb{R}\}$.
   - $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ ist eine Nullmenge.
   - Ist $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt, so ist ∂K eine Nullmenge.
   - Ist $N \subset \mathbb{R}^n$ eine Nullmenge und $\phi \in \mathrm{Lip}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, so ist $\phi(N)$ eine Nullmenge.

6. Welche hinreichenden Bedingungen an eine Folge Lebesgue-integrierbarer Funktionen kennst Du, um Integral und Grenzwert vertauschen zu dürfen?

7. Kannst Du den Konvergenzsatz von Beppo Levi beweisen?

8. Wie sind die Räume L^p definiert? Welche Eigenschaften dieser Räume kennst Du?

9. Wie kann man die Elemente in L^p als Grenzwerte glatter Funktionen mit kompaktem Träger charakterisieren?

10. Wie lautet die Hölder-Ungleichung?

11. Welche der folgenden Aussagen sind richtig, welche falsch?
    (Es sei stets $1 \leq p < q < +\infty$.)
    - Ist $f \in L^p$ beschränkt, so ist $f \in L^q$.
    - Ist $f \in L^q$ beschränkt, so ist $f \in L^p$.
    - Ist $f \in L^p$ und $\mathrm{Vol}(\mathrm{supp}\, f) < \infty$, so ist $f \in L^q$.
    - Ist $f \in L^q$ und $\mathrm{Vol}(\mathrm{supp}\, f) < \infty$, so ist $f \in L^p$.