Übungen

Partielle Differentialgleichungen I

Karsten Matthies, Marc Georgi, Nihar Jangle

Abgabe: Montag, 3.11.2003, in der Vorlesung

Aufgabe 1: Beweise die Leibnizformel in der Multiindexnotation:

$$D^\alpha(uv) = \sum_{\beta\leq\alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^\beta u D^{\alpha-\beta} v,$$

wobei $u, v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ glatt sind.

Notation:[Evans, Appendix A.3] Für einen Multiindex $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ ist $\alpha! = \alpha_1!\alpha_2!\ldots\alpha_n!$ und $\binom{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!}$. Ausserdem bedeutet $\beta \leq \alpha$, dass $\beta_i \leq \alpha_i$ für $i = 1, \ldots, n$.

Aufgabe 2: Zeige, dass die Korteweg-de Vries-Gleichung

$$u_t + uu_x + u_{xxx} = 0, \quad x \in \mathbb{R}$$

Solitärwellenlösungen der Form

$$u(x,t) = a_c \mathrm{sech}^2(k_c(x - ct))$$

hat, wobei $\mathrm{sech}(x) = \frac{1}{\sinh(x)} = \frac{2}{e^x+e^{-x}}$ und a_c und k_c zu bestimmen sind. Beschreibe das Verhalten dieser Lösungen.

Aufgabe 3: Zeige, dass die Laplacegleichung $\Delta u = 0$ rotationsinvariant ist. D.h. wenn O eine orthogonale $n \times n$ Matrix ist und wenn v durch

$$v(x) := u(Ox), \quad x \in \mathbb{R}^n$$

definiert ist, dann gilt $\Delta v = 0$.

Aufgabe 4: Gib eine explizite Formel für eine Funktion u an, die das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} u_t + b \cdot Du + cu &= 0 \text{ in } \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \\ u &= g \text{ auf } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\} \end{aligned}$$

löst. Hierbei sind $c \in \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{R}^n$ konstant.