Übungen

Partielle Differentialgleichungen I

Karsten Matthies, Marc Georgi, Nihar Jangle

Abgabe: Montag, 10.11.2003, in der Vorlesung

Aufgabe 4: Eine Funktion $v \in C^2(\bar{U})$ heißt *subharmonisch*, falls

$$-\Delta v \leq 0 \qquad \text{in U gilt.}$$

(a) Beweise, dass für subharmonische v gilt:

$$v(x) \leq ⨍_{B(x,r)} v \; \mathrm{d}y \qquad \text{für alle B(x,r)} \subset \text{U.}$$

(b) Zeige, dass daher $\max_{\bar{U}} v = \max_{\partial U} v$ ist.

(c) Sei $\phi : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ glatt und konvex. Nimm an u ist harmonisch und $v := \phi(u)$. Beweise, v ist subharmonisch.

Aufgabe 5: Beweise, dass eine Konstante C existiert, die nur von n abhängt, so dass

$$\max_{B(0,1)} |u| \leq C(\max_{\partial B(0,1)} |g| + \max_{B(0,1)} |f|)$$

gilt, wenn u eine glatte Lösung von

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f && \text{in } B^0(0,1) \\ u &= g && \text{auf } \partial B(0,1) \qquad \text{ist.} \end{aligned}$$

Aufgabe 6: Modifiziere den Mittelwertformel, um für $n \geq 3$ zu zeigen, dass

$$u(0) = ⨍_{\partial B(0,r)} g \; \mathrm{d}S + \frac{1}{n(n-2)\alpha(n)} \int_{B(0,r)} \left(\frac{1}{|x|^{n-2}} - \frac{1}{r^{n-2}} \right) f \; \mathrm{d}x$$

für Lösungen von

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f && \text{in } B^0(0,r) \\ u &= g && \text{auf } \partial B(0,r) \qquad \text{gilt.} \end{aligned}$$

Aufgabe 7: Definiere $\eta \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ durch

$$\begin{aligned} \eta(x) &:= \quad C\exp\left(\tfrac{1}{\|x\|^2-1}\right), \quad falls \quad \|x\| < 1, \\ \eta(x) &:= \qquad 0\,, \qquad\qquad falls \quad \|x\| \geq 1, \end{aligned}$$

wobei die Konstante C so gewählt sei, dass $\int_{\mathbb{R}^n} \eta \, \mathrm{d}x = 1$ gelte.
Für jedes $\varepsilon > 0$ setze:

$$\eta_\varepsilon(x) := \frac{1}{\varepsilon^n}\eta\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big).$$

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, definiere für $\varepsilon > 0$ $U_\varepsilon := \{x \in U \,|\, \mathrm{dist}(x, \partial U) > \varepsilon\}$ und für lokal integrierbare Funktionen $f : U \to \mathbb{R}$:

$$f^\varepsilon := \eta_\varepsilon * f \quad \text{auf} \quad U_\varepsilon, \text{ d.h.}$$

$$f^\varepsilon(x) = \int_U \eta_\varepsilon(x-y) f(y) \, \mathrm{d}x = \int_{B(0,\varepsilon)} \eta_\varepsilon(y) f(x-y) \, \mathrm{d}y \qquad \text{für } x \in U_\varepsilon.$$

Die Funktionen η_ε sind C^∞ und erfüllen

$$\int_{\mathbb{R}^n} \eta_\varepsilon \, \mathrm{d}x = 1, \qquad \mathrm{supp}(\eta_\varepsilon) \subset B(0, \varepsilon).$$

Zeige:

(a) $f^\varepsilon \in C^\infty(U_\varepsilon)$.

(b) $f^\varepsilon \to f$ f. ü. für $\varepsilon \to 0$.

(c) Ist $f \in C(U)$, dann gilt $f^\varepsilon \to f$ gleichmäßig auf kompakten Teilmengen von U.