Übungen

Partielle Differentialgleichungen I

Karsten Matthies, Marc Georgi, Nihar Jangle

Abgabe: Montag, 17.11.2003, in der Vorlesung

Aufgabe 9: Sei u die Lösung von

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 \text{ in } \mathbb{R}^n_+ \\ u &= g \text{ auf } \partial\mathbb{R}^n_+, \end{aligned}$$

die durch Greensche Funktion aus der Vorlesung gegeben ist. Nehme an, dass g beschränkt ist und $g(x) = |x|$ für $x \in \partial\mathbb{R}^n_+$ und $|x| \leq 1$. Zeige, dass Du nicht beschränkt ist nahe $x = 0$. (Hinweis: Betrachte $\frac{u(\lambda e_n)-u(0)}{\lambda}$).

Aufgabe 10: Bezeichne U^+ die obere Halbkugel, also alle $x \in \mathbb{R}^n$ mit $|x| < 1$ und $0 < x_n$. Nehme an, dass $u \in C^2(U^+)$ harmonisch in U^+ ist und $u = 0$ auf $\partial U^+ \bigcap \{x_n = 0\}$.

Für $x \in B^0(0,1)$ setze $v(x) := \begin{cases} u(x) & \text{für } 0 < x_n \\ -u(x_1, .., x_{n-1}, -x_n) & \text{sonst} \end{cases}$

Zeige, dass v harmonisch in $B^0(0,1)$ ist.

Aufgabe 11: Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene unbeschränkte Menge mit $U \neq \mathbb{R}^n$ und g eine glatte Funktion auf ∂U. Zeige, dass die Lösung zu

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 \text{ in } U \\ u &= g \text{ auf } \partial U \end{aligned}$$

nicht eindeutig sein muss. (Tip: Betrachte den Fall $U = \mathbb{R}^n_+$)

Aufgabe 12: Löse die Gleichung

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 \text{ in } Q \\ u &= g \text{ auf } \partial Q \end{aligned}$$

wobei $Q \subset \mathbb{R}^2$ das Einheitsquadrat $[0,1]^2$ bezeichnet und g auf dem Rand folgendermassen definiert ist:

$$g(x,y) := \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \leq x \leq 1 \text{ und } y = 0 \\ (e + 2e^{-1})\sin(y) & \text{für } x = 1 \text{ und } 0 \leq y \leq 1 \\ (e^x + 2e^{-x})\sin(1) & \text{für } 0 \leq x \leq 1 \text{ und } y = 1 \\ 3\sin(y) & \text{für } x = 0 \text{ und } 0 \leq y \leq 1 \end{cases}$$

Mache dazu einen Lösungsansatz mit *Trennung der Variablen*, d.h. setze $u(x,y) = a(x)b(y)$ mit zu bestimmenden glatten Funktionen a und b. (*Freiwilliger Zusatz*: Wie sieht die Lösung für irgendeine glatte Funktion auf dem Rand aus?)