Übungen

Partielle Differentialgleichungen I

Karsten Matthies, Marc Georgi, Nihar Jangle

Abgabe: Dienstag, 25.11.2003, 15 Uhr, R 107

Aufgabe 13: Gib eine explizite Lösung an für

$$\begin{aligned} u_t - \Delta u + cu &= f \text{ in } \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \\ u &= g \text{ auf } \mathbb{R}^n \times \{t=0\}, \end{aligned}$$

wobei $c \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 14: Sei u eine glatte Lösung von $u_t - \Delta u = 0$ in $\mathbb{R}^n \times (0,\infty)$.

a) Zeige $u_\lambda(x,t) := u(\lambda x, \lambda^2 t)$ löst ebenfalls die Wärmeleitungsgleichung für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$.

b) Folgere daraus: $v(x,t) := x \cdot Du(x,t) + 2tu_t(x,t)$ löst die Wärmeleitungsgleichung.

Aufgabe 15: Eine Funktion $v \in C_1^2(U_T)$ ist eine Unterlösung der Wärmeleitungsgleichung, falls

$$v_t - \Delta v \leq 0 \text{ in } U_T.$$

a) Zeige für eine Unterlösung v, dass

$$v(x,t) \leq \frac{1}{4r^n} \int\int_{E(x,t;r)} v(y,s) \frac{|x-y|^2}{(t-s)^2} dyds$$

für alle $E(x,t;r) \subset U_T$.

b) Folgere für U beschränkt:

$$\max_{\bar{U}_T} v = \max_{\Gamma_T} v.$$

c) Folgere das Vergleichsprinzip: Sei u eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung und $u \geq v$ auf Γ_T, dann ist $u \geq v$ in U_T.

Aufgabe 16: Sei U offen und beschränkt und $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ glatt. Betrachte eine glatte Lösung $(u(x,t), v(x,t))$ des Reaktionsdiffusionssystem in U_T

$$\begin{aligned} u_t &= \Delta u + f(u,v) \\ v_t &= \Delta v + g(u,v) \end{aligned}$$

mit Randwerten $u = v = 0$ auf ∂U. Nimm weiter an, dass $f(0,v) \geq 0$ für alle v und $g(u,0) \geq 0$ für alle u. Zeige, dass für positive Anfangsdaten, die Lösungen positiv bleiben: Ist $u(x,0) \geq 0$ und $v(x,0) \geq 0$ für alle $x \in U$, dann $u \geq 0$ und $v \geq 0$ in U_T.