Übungen

Partielle Differentialgleichungen I

Karsten Matthies, Marc Georgi, Nihar Jangle

Abgabe: Dienstag, 02.12.2003, 15 Uhr, R 107

Aufgabe 17:

(a) Zeige, dass
$$u(x,y) = F(x) + G(y)$$
für beliebige Funktionen F und G eine allgemeine Lösung der PDG $u_{xy} = 0$ ist.

(b) Betrachte folgenden Koordinatenwechsel: $\xi = x + t, \quad \eta = x - t$. Zeige:
$$u_{tt} - u_{xx} = 0 \Longleftrightarrow u_{\xi\eta} = 0.$$

(c) Benutze (a) und (b), um die d'Alembertsche Formel zu erhalten.

Aufgabe 18: (Äquipartition und Erhaltung der Energie). Sei $u \in C^2(\mathbb{R} \times [0,\infty))$ eine Lösung des Anfangswertproblems der ein-dimensionalen Wellengleichung:
$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 & \text{in } \mathbb{R} \times (0,\infty) \\ u = g, u_t = h & \text{auf } \mathbb{R} \times \{t = 0\}. \end{cases}$$
Nimm an, g und h haben kompakten Träger. Die *kinetische* Energie ist $k(t) := \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} u_t^2(x,t)\,\mathrm{d}x$ und die *potentielle* Energie ist $p(t) := \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} u_x^2(x,t)\,\mathrm{d}x$.
Beweise

(i) $k(t) + p(t)$ ist konstant in t,

(ii) $k(t) = p(t)$ für alle hinreichend großen t.

Aufgabe 19: Löse die ein-dimensionale Wellengleichung $u_{tt} = u_{xx}$ für $x \in (0,\pi)$ und $t \geq 0$ mit der Methode der Trennung der Variablen. Anfangs- bzw. Randbedingungen sind $u(0,x) = u_0(x)$ und $u_t(0,x) = 0$ bzw. $u(t,0) = u(t,\pi) = 0$.

Aufgabe 20: Sei $D = \mathbb{R}^n \times (0,T]$ und $u \in C^2(D) \cap C(\bar{D})$ eine beschränkte Lösung der Wärmegleichung $u_t = \Delta u$. Zeige, dass $\sup_D u \leq \sup_{\mathbb{R}^n} u(\cdot,0)$ gilt. Ein eventuell hilfreicher Tipp wäre, die Funktion $v = u - \varepsilon(2nt + |x|^2)$ zu betrachten.