Übungen

Partielle Differentialgleichungen I

Karsten Matthies, Marc Georgi, Nihar Jangle

Abgabe: Dienstag, 16.12.2003, 15 Uhr, R 139

Aufgabe 21: Sei u eine Lösung von

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0 & \text{in } \mathbb{R}^3 \times (0, \infty) \\ u = g, u_t = h & \text{auf } \mathbb{R}^3 \times \{t = 0\}, \end{cases}$$

wobei g, h glatt mit kompakten Träger sind. Zeige: es gibt eine Konstante C, so dass

$$|u(x,t)| \leq C/t (x \in \mathbb{R}^3, t > 0)$$

gilt.

Aufgabe 22: Gib die charakteristischen Gleichungen für die Transportgleichung

$$u_t + b \cdot Du = f \text{ in } \mathbb{R}^n \times (0, \infty)$$

an, mit $b \in \mathbb{R}^n, f = f(x,t)$. Benutze diese Gleichungen, um die Transportgleichung mit Randdaten

$$u = g \text{ auf } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}$$

zu lösen. Vergleiche die Lösung mit der Lösung aus der Vorlesung in Abschnittt 2.1.

Aufgabe 23: Löse mittels Charakteristiken:

a) $x_1 u_{x_1} + x_2 u_{x_2} = 2u, u(x_1, 1) = g(x_1)$.

b) $u_{x_1} + u_{x_2} = u^2, u(x_1, 0) = g(x_1)$ (vgl. Evans 3.2.2b)

Aufgabe 24: Seien $a, b \in BC^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ positive Funktionen. Betrachte eine Lösung $u \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ von

$$a(x)\partial_x u + b(y)\partial_y u = 0.$$

Beweise die Existenz von Funktionen $f, g, h \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, so dass

$$u(x,y) = f(g(x) + h(y)).$$

Hinweis: Mache einen Ansatz für f, g, h und beweise the Gleichung mittels Charakteristiken.