Weihnachtsübungen

# Partielle Differentialgleichungen I

Karsten Matthies, Marc Georgi, Nihar Jangle

**Freiwillige Abgabe: Dienstag, 6.1.2004, 15 Uhr, R 139**

**Aufgabe 25:** Betrachte die Laplacegleichung $\Delta u = 0$ in $\mathbb{R}^2$, gebe Anfangsdaten

$$u = 0, \frac{\partial u}{\partial x_2} = \frac{1}{n}\sin(nx_1) \quad \text{auf } \{x_2 = 0\},$$

vor. Leite per Trennung der Variablen die Lösung

$$u = \frac{1}{n^2}\sin(nx_1)\sinh(nx_2)$$

her. Ist das Anfangswertsproblem wohlgestellt? (D.h.: Hängt die Lösung stetig (z.B. in $C^0$) von den Anfangsdaten ab?)

**Aufgabe 26:** Leite eine (einfache) Straßenverkehrsgleichung her. Hierbei beschreibe $N(x,t)$ die Fahrzeugdichte und $v(x,t)$ die Geschwindigkeit mit $x, t \in \mathbb{R}$. Aus der Erhaltung der Fahrzeugzahl und einer Zustandsgleichung für den Zusammenhang zwischen $N$ und $v$

$$v(N) = -\frac{(N - N^0)v^0}{N^0}$$

ergibt sich eine Erhaltungsgleichung für $N$, hierbei ist $M^0$ die maximale Fahrzeugdichte und $v^0$ die Höchstgeschwindigkeit, interpretiere.

**Aufgabe 27:** Löse die Straßenverkehrsgleichung

$$N_t + (1 - N)N - x = 0$$

mittels Charakteristiken. Wähle dabei Anfangswerte$N_0(x) = N(x, 0)$

$$N_0(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x < 0 \\ x & \text{für} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{für} \quad x > 1 \end{cases}$$

Beschreibe das Auftreten von Schocks und interpretiere.

**Aufgabe 28:** Zeige für die in der Vorlesung hergeleitete Lösung der Schrödingergleichung

$$\|u(.,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \frac{1}{(4\pi|t|)^{n/2}}\|g\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}.$$

Interpretation?

**Aufgabe 29:** Betrachte die viskose Erhaltungsgleichung

$$u_t + F(u)_x - a u_{xx} = 0 \text{ in} \mathbb{R} \times (0, \infty),$$

wobei $a > 0$ und $F$ konvex mit $F''(x) \geq \theta > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Es gibt Lösungen der Form $u(x,t) = v(x - \sigma t)$, wobei $v$ implizit durch

$$s = \int_c^{v(s)} \frac{a}{F(z) - \sigma z + b} \, \mathrm{d}z (s \in \mathbb{R})$$

definiert ist mit Konstanten $c$ und $b$.

**Aufgabe 30:** [Fortsetzung] Zeige wandernde Wellen $v$ mit

$$\lim_{s \to -\infty} v(s) = u_l, \quad \lim_{s \to \infty} v(s) = u_r$$

für $u_l > u_r$ existieren genau dann wenn

$$\sigma = \frac{F(u_l) - F(u_r)}{u_l - u_r}.$$

Betrachte nun solche Wellen $u^\epsilon$ für $a = \epsilon$ mit $u^\epsilon(0,0) = \frac{u_l + u_r}{2}$. Bestimme $\lim_{\epsilon \to 0} u^\epsilon$ und erkläre Deine Antwort.

# Frohe Weihnachten und alles Gute für das Neue Jahr!