Übungen

Partielle Differentialgleichungen I

Karsten Matthies, Marc Georgi, Nihar Jangle

Abgabe: Dienstag, 27.01.2004, 15 Uhr, R 107

Aufgabe 39: Sei U offen und beschränkt mit C^1-Rand. Zeige, dass „typische" Funktionen $u \in L^p(U)$ keine Spur auf ∂U besitzen. Genauer: Beweise, es existiert kein beschränkter linearer Operator

$$T : L^p(U) \longmapsto L^p(\partial U)$$

mit $Tu = u|_{\partial U}$ für $u \in C(\bar{U}) \cap L^p(\partial U)$.

Aufgabe 40: Nimm an, U ist offen, beschränkt und $u \in W^{1,p}(U)$ für $1 \leq p \leq \infty$. Zeige:

(i) Für eine C^1-Funktion $F : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ mit F' beschränkt gilt:

$$v := F(u) \in W^{1,p}(U) \text{ und } v_{x_i} = F'(u)u_{x_i} \quad (i = 1, \ldots, n).$$

(ii) u^+ und u^- sind aus $W^{1,p}(U)$. Ferner gilt:

$$Du^+ = \begin{cases} Du & \text{f.ü. auf } \{u > 0\} \\ 0 & \text{f.ü. auf } \{u \leq 0\}, \end{cases}$$

$$Du^- = \begin{cases} 0 & \text{f.ü. auf } \{u \geq 0\} \\ -Du & \text{f.ü. auf } \{u < 0\}. \end{cases}$$

(Hinweis: $u^+ = \lim_{\varepsilon \mapsto 0} F_\varepsilon(u)$ für

$$F_\varepsilon(z) := \begin{cases} (z^2 + \varepsilon^2)^{1/2} - \varepsilon & \text{falls } z \geq 0 \\ 0 & \text{falls } z < 0.) \end{cases}$$

Aufgabe 41: Zeige, für U offen und beschränkt ist $C^\infty(U)$ nicht dicht in $W^{m,\infty}$ für alle $m = 0, 1, 2, \ldots$.

Aufgabe 42: Definiere für $0 < s < \infty$ und $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$

$$H^s(\mathbb{R}^n) := \{u \in L^2(\mathbb{R}^n); (1 + |y|^s)\hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)\}.$$

Wähle als Norm

$$\|u\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} := \|(1 + |y|^s)\hat{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

Man kann zeigen (siehe Evans 5.8.4), dass diese Definition für $H^s(\mathbb{R}^n)$ für $s \in \mathbb{N}$ mit der gewöhnlichen Definition der Sobolev-Räume übereinstimmt und dass die Normen äquivalent sind.
Benutze die Fourier-Transformation, um zu zeigen, dass aus $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$ und $s > n/2$ folgt $u \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit

$$\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq C\|u\|_{H^s(\mathbb{R}^n)},$$

wobei C eine Konstante ist, die nur von s und n abhängt.