Übungen

Partielle Differentialgleichungen I

Karsten Matthies, Marc Georgi, Nihar Jangle

Abgabe: Dienstag, 03.02.2004, 15 Uhr, R 107

Aufgabe 43: Zeige, dass für allgemeine offene Gebiete $U \subset \mathbb{R}^n$ die beschränkte Soboleveinbettung $W^{k,p}(U)$ nach $C^{m,\gamma}(\bar{U})$ auch für $k - \frac{n}{p} > m + \gamma$ nicht existieren muss. Betrachte dazu z.B. $U = \{(x,y) | 0 < x < 1, y \in \mathbb{R}^{n-1}, |y| < \exp(-\frac{1}{x^2})\}$.

Für die Aufgaben 44-46 sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt und mit glattem Rand. Die Koeffizienten seien glatt und L sei gleichmässig elliptisch.

Aufgabe 44: Sei

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} (a^{ij} u_{x_i})_{x_j} + cu$$

Zeige, es gibt ein $\mu > 0$, so dass die zugehörige Bilinearform $B[,]$ die Voraussetzungen des Satzes von Lax-Milgram erfüllt, wenn

$$c(x) \geq -\mu \text{ für alle } x \in U \text{ gilt.}$$

Aufgabe 45: Eine Funktion $u \in H_0^2(U)$ heisst eine schwache Lösung des Randwertproblems der Biharmonischen Gleichung

$$\begin{aligned} \Delta^2 u &= f \text{ in } U \\ u = \frac{\partial u}{\partial \nu} &= 0 \text{ auf } \partial U, \end{aligned}$$

falls

$$\int_U \Delta u \Delta v \, \mathrm{d}x = \int_U f v \, \mathrm{d}x$$

für alle $v \in H_0^2(U)$. Zeige, dass es für ein gegebenes $f \in L^2(U)$ eine eindeutige schwache Lösung gibt.

Aufgabe 46: Sei $0 < \alpha < \beta \leq 1$. Zeige, dass die Einbettungen

(i) $C^1(\bar{U}) \subset C^0(\bar{U})$

(ii) $C^{0,\beta}(\bar{U}) \subset C^{0,\alpha}(\bar{U})$

kompakt sind.