Übungen

Partielle Differentialgleichungen I

Karsten Matthies, Marc Georgi, Nihar Jangle

Abgabe: Dienstag, 10.2.2004, in Raum 107, 15 Uhr

Aufgabe 47: Sei U zusammenhängend. Eine Funktion $u \in H^1(U)$ ist eine schwache Lösung von dem *Neumann Problem*

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \text{ in } U \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} &= 0 \text{ auf } \partial U \end{aligned}$$

falls

$$\int_U Du \cdot Dv \, \mathrm{d}x = \int_U fv \, \mathrm{d}x \tag{1}$$

für alle $v \in H^1(U)$ gilt. Sei $f \in L^2(U)$. Zeige dann, dass das Neumann Problem eine schwache Lösung besitzt falls

$$\int_U f = 0 \tag{2}$$

gilt.

Zusatz: Zeige die umgekehrte Richtung: Falls das Neumann Problem eine schwache Lösung besitzt, so gilt (2).

Aufgabe 48: Sei $u \in H^1(R^n)$ mit kompakten Träger eine schwache Lösung zu

$$-\Delta u + c(u) = f \text{ in } R^n. \tag{3}$$

wobei $f \in L^2$ und $c : R \to R$ glatt ist, mit $c(0) = 0$ und $0 \leq c'$. Zeige $u \in H^2(R^n)$.

Hinweis: Es empfiehlt sich dabei, den Beweis aus der Vorlesung nachzumachen; aber ohne die Abschneide-Funktion!

Aufgabe 49: Bezeichne mit B den Einheitsball in der Ebene. Entferne den Nullpunkt aus B und nenne dieses Gebiet U. Zeige, dass dann das Dirichlet Problem

$$\begin{aligned} \Delta u &= 1 \text{ in } U \\ u &= 0 \text{ auf } \partial U \end{aligned}$$

eine schwache Lösung besitzt, obwohl es keine klassische gibt.