Übungen

Einführung in die Dynamischen Systeme 1

Bernold Fiedler, Stefan Liebscher

Abgabe: Donnerstag, 22.04.2004, in der Vorlesung

Aufgabe 1: Wie betrachten einen Fluss $\varphi(t, x)$ auf der reellen Achse $x \in \mathbb{R}$.

(i) Welche α- und ω-Limesmengen können auftreten?

(ii) Zeichne einige Phasenportraits, die verschiedene mögliche Phänomene zeigen.

Hinweis: Betrachte beschränkte und unbeschränkte Trajektorien.

Aufgabe 2: Gegeben sei ein Fluss φ. Die Trajektorie $\varphi_t(x_0)$ durch x_0 sei periodisch mit beliebig kleiner Periode, d.h.

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, 0 < T < \varepsilon \qquad \varphi_T(x_0) = x_0$$

Zeige, dass dann x_0 ein Gleichgewicht ist.

Aufgabe 3: Sei φ ein Fluss auf $X = \mathbb{R}^n$. Bezeichne

$$S_\vartheta : \mathbb{R} \times X \to \mathbb{R} \times X, \qquad (t, x) \mapsto (t + \vartheta, x)$$

den Zeit-Shift auf dem erweiterten Phasenraum $\mathbb{R} \times X$.

(i) Zeige, dass S_ϑ für jedes feste ϑ Integralkurven von φ in Integralkurven überführt.

(ii) Wann wird eine Integralkurve durch ein bestimmtes S_ϑ festgelassen? Wann durch alle S_ϑ?

Aufgabe 4: Der Fluss $\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ des mathematischen Pendels ist gegeben durch das Vektorfeld

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ -\sin x \end{pmatrix}.$$

Zeige, dass der Fluss φ äquivariant unter der Verschiebung um eine volle Pendelumdrehung ist, d.h.

$$\varphi\left(t, \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\pi \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \varphi\left(t, \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix}\right) + \begin{pmatrix} 2\pi \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{für alle } t, x, v.$$

Hinweis: Eindeutigkeit der Lösung einer Differentialgleichung kann benutzt werden.