

Übungen  
**Einführung in die Dynamischen Systeme 1**  
Bernold Fiedler, Stefan Liebscher  
**Abgabe: Donnerstag, 29.04.2004, in der Vorlesung**

**Aufgabe 5:** Das Vektorfeld  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  sei gegeben durch

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} x,$$

mit  $a, b \in \mathbb{R}$ . Transformiere diese lineare Differentialgleichung auf Polarkoordinaten:

$$x = \begin{pmatrix} r \cos \phi \\ r \sin \phi \end{pmatrix},$$

mit  $r > 0$ ,  $\phi \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ . Skizziere für  $a < 0$ ,  $a = 0$ ,  $a > 0$  und selbst gewählte  $b$  Vektorfelder und Phasenportraits in  $(r, \phi)$  sowie  $x$ .

**Aufgabe 6:** Betrachte die Abbildung

$$\Phi_t(x_1, x_2) = (x_1 + t, x_2 + \sigma t), \quad \sigma \in \mathbb{R},$$

mit

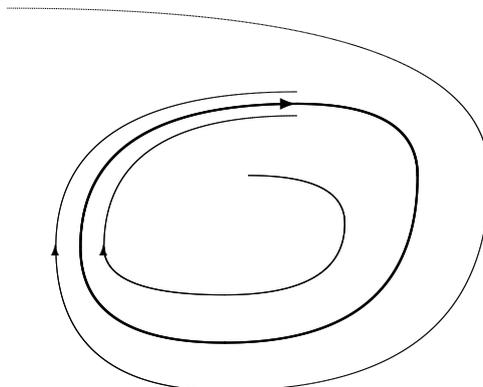
$$\Phi_t(x_1 + k, x_2 + n) = \Phi_t(x_1, x_2), \quad \forall k, n \in \mathbb{Z},$$

die einen Fluss auf dem 2-Torus  $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$  erklärt. Sei zunächst  $\sigma$  rational. Wie sehen dann typische Trajektorien aus? Beschreibe  $\alpha$ - und  $\omega$ -Limesmengen.

*Freiwilliger Zusatz:* Was passiert für irrationale  $\sigma$  ?

**Aufgabe 7:** Gegeben sei ein periodischer Orbit  $\Gamma$  in  $X = \mathbb{R}^n$  und eine Umgebung  $U$  von  $\Gamma$  in  $X$ , so dass jede Trajektorie  $\gamma(x_0)$ ,  $x_0 \in U$ , für  $t \rightarrow \infty$  gegen  $\Gamma$  konvergiert.

Beispiel:



Zeige, dass dann jedes erste Integral in  $U$  konstant ist.

**Aufgabe 8:** Betrachte das gedämpfte Pendel

$$\ddot{x} + \mu \dot{x} + \sin x = 0,$$

mit  $\mu > 0$ . Zeige, dass die Energie

$$H(x, \dot{x}) = \frac{1}{2} \dot{x}^2 - \cos x$$

entlang Trajektorien streng monoton fällt, außer in Ruhelagen.

*(Diesmal noch freiwilliger) Zusatz:* Benutze `dstool` zur Visualisierung des Phasenportraits. Auf der Web-Seite <http://dynamics.mi.fu-berlin.de/lectures/> ist eine Beschreibung bereitgestellt. Abweichend davon kann die neueste Version (ohne weitere Vorabkonfigurationen) auf den Unix-Rechnern am Fachbereich über das Kommando `dstool` gestartet werden. Im Parser kann das System zum Beispiel folgendermaßen eingegeben werden:

```
‡ Gedaempftes Pendel
x' = v
v' = -m v - sin(x)
INITIAL m 0.1
RANGE v -5 5 x -6.3 6.3
```

Bitte auch immer die Gleichungen in eine Datei sichern und zusammen mit den übrigen Bildern ausdrucken.

*Freiwilliger Zusatz:* Konvergiert jede Trajektorie gegen eine Ruhelage?