Übungen

Einführung in die Dynamischen Systeme 1

Bernold Fiedler, Stefan Liebscher

Abgabe: Donnerstag, 29.04.2004, in der Vorlesung

Aufgabe 5: Das Vektorfeld $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sei gegeben durch

$$\dot{x} \;=\; \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} x,$$

mit $a, b \in \mathbb{R}$. Transformiere diese lineare Differentialgleichung auf Polarkoordinaten:

$$x \;=\; \begin{pmatrix} r\cos\phi \\ r\sin\phi \end{pmatrix},$$

mit $r > 0$, $\phi \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. Skizziere für $a < 0$, $a = 0$, $a > 0$ und selbst gewählte b Vektorfelder und Phasenportraits in (r, ϕ) sowie x.

Aufgabe 6: Betrachte die Abbildung

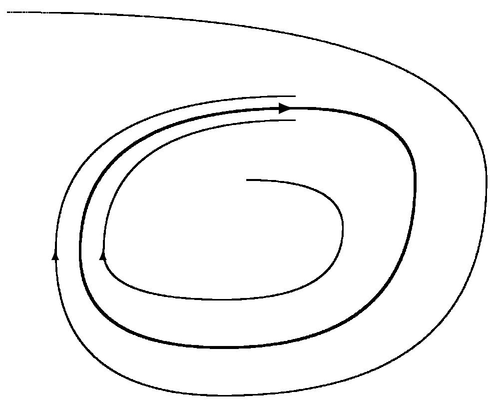
$$\Phi_t(x_1, x_2) = (x_1 + t, x_2 + \sigma t), \qquad \sigma \in \mathbb{R},$$

mit

$$\Phi_t(x_1 + k, x_2 + n) = \Phi_t(x_1, x_2), \qquad \forall k, n \in \mathbb{Z},$$

die einen Fluss auf dem 2-Torus $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ erklärt. Sei zunächst σ rational. Wie sehen dann typische Trajektorien aus? Beschreibe α- und ω-Limesmengen.
Freiwilliger Zusatz: Was passiert für irrationale σ ?

Aufgabe 7: Gegeben sei ein periodischer Orbit Γ in $X = \mathbb{R}^n$ und eine Umgebung U von Γ in X, so dass jede Trajektorie $\gamma(x_0)$, $x_0 \in U$, für $t \to \infty$ gegen Γ konvergiert.
Beispiel:



Zeige, dass dann jedes erste Integral in U konstant ist.

Aufgabe 8: Betrachte das gedämpfte Pendel

$$\ddot{x} + \mu\dot{x} + \sin x = 0,$$

mit $\mu > 0$. Zeige, dass die Energie

$$H(x, \dot{x}) = \frac{1}{2}\dot{x}^2 - \cos x$$

entlang Trajektorien streng monoton fällt, außer in Ruhelagen.
(Diesmal noch freiwilliger) Zusatz: Benutze `dstool` zur Visualisierung des Phasenportraits. Auf der Web-Seite `http://dynamics.mi.fu-berlin.de/lectures/` ist eine Beschreibung bereitgestellt. Abweichend davon kann die neueste Version (ohne weitere Vorabkonfigurationen) auf den Unix-Rechnern am Fachbereich über das Kommando `dstool` gestartet werden. Im Parser kann das System zum Beispiel folgendermaßen eingegeben werden:

```
♯ Gedaempftes Pendel
x' = v
v' = -m v - sin(x)
INITIAL m 0.1
RANGE v -5 5 x -6.3 6.3
```

Bitte auch immer die Gleichungen in eine Datei sichern und zusammen mit den übrigen Bildern ausdrucken.
Freiwilliger Zusatz: Konvergiert jede Trajektorie gegen eine Ruhelage?