Übungen

Einführung in die Dynamischen Systeme 1

Bernold Fiedler, Stefan Liebscher

Abgabe: Donnerstag, 06.05.2004, in der Vorlesung

Aufgabe 9: [vgl. Arnol'd, 2.4.5] Für welche $k \in \mathbb{R}$ hat das System

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 \\ \dot{x}_2 &= kx_2 \end{aligned}$$

mit $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ ein nichtkonstantes erstes Integral?

Aufgabe 10: Löse die folgenden Anfangswertprobleme durch „Trennung der Variablen“:

(i) $\dot{x} = x^3 e^t, \qquad x(0) = 2,$

(ii) $\dot{x} = 4 + x^2, \qquad x(0) = 0,$

(iii) $\dot{x} = 1 - x^2, \qquad x(0) = 0.$

Wie groß ist jeweils das maximale Existenzintervall der Lösung?

Aufgabe 11: Bestimme die ω-Limesmengen jeder Trajektorie von

(i) $\dot{x} = x^3 + 3x^2 - 6x - 8, \qquad x \in \mathbb{R}$

(ii) $\dot{x} = \sin(x), \qquad x \in \mathbb{R}$

(iii) $\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos x_2 \\ \cos x_1 \end{pmatrix}, \qquad x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$

Hinweis: Bestimme in der letzten Teilaufgabe ein erstes Integral.

Aufgabe 12: Ein punktförmiger Hund hat im (x, y)-Ursprung des $\mathbb{R}^2$ eine Wurst geschnappt und rennt mit der Geschwindigkeit 1 die x-Achse entlang. Gleichzeitig rennt ein zweiter Hund im Punkt $x = 0$, $y = d$ los, immer mit Geschwindigkeit 1 auf den ersten zu.

Wie nahe kommen sich die Hunde?

Hinweis: Beschreibe die Dynamik in geeigneten Koordinaten (z.B. r = Abstand der Hunde, φ = Winkel zwischen der Verbindungsgeraden der Hunde und der x-Achse) und löse dieses System durch Trennung der Variablen.