Übungen

Einführung in die Dynamischen Systeme 1

Bernold Fiedler, Stefan Liebscher

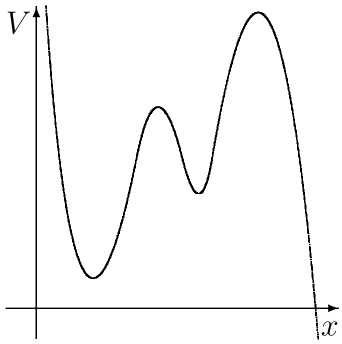
Abgabe: Donnerstag, 13.05.2004, in der Vorlesung

Aufgabe 13: Zeichne die Trajektorien von

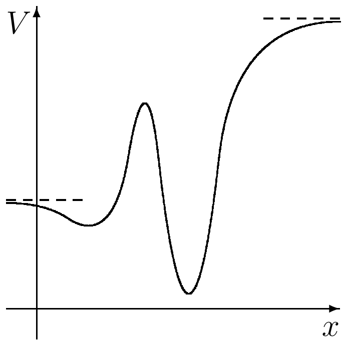
$$\ddot{x} + V'(x) = 0,$$

(i) für das Kepler-Problem, $V(x) = -\frac{1}{x} + C\frac{1}{x^2}$, $C > 0$, $x > 0$;

(ii)



(iii)



Aufgabe 14: Ein Standardmodell (SIR) für die Beschreibung von Epidemien lautet:

$$\begin{aligned}
\dot{S} &= \mu - \beta SI - \mu S, \\
\dot{I} &= \beta SI - \gamma I - \mu I, \\
\dot{R} &= \gamma I - \mu R.
\end{aligned}$$

Dabei bezeichnet S den Anteil der für die Krankheit anfälligen Gesunden *(susceptible)*, I den Anteil der Infizierten *(infective)* und R den Anteil der Resistenten *(removed)* mit $S(0) + I(0) + R(0) = 1$. Der Parameter $1/\mu$ misst die durchschnittliche Verweildauer in der Population (z.B. die Lebensspanne), $1/\gamma$ die durchschnittliche Zeit des Krankheitsverlaufes und β die Wahrscheinlichkeit einer Infektion beim Zusammentreffen eines Infizierten mit einem anfälligen Gesunden.

(i) Zeige, dass $S(t) + I(t) + R(t)$ konstant ist.

(ii) Bestimme alle Gleichgewichte.

(iii) Erkläre anschaulich die einzelnen Terme in der Differentialgleichung.

Freiwilliger Zusatz: Füge einen möglichst einfachen Term hinzu, um das Modell etwas realistischer zu machen. Begründe Deine Änderung.

Aufgabe 15: Untersuche numerisch mit `dstool` den Van-der-Pol-Oszillator

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \varepsilon^{-1}\Big(y + x(1-x^2)\Big) \\ \dot{y} &= -x \end{aligned}$$

für $\varepsilon = 0.1, 0.01, 0.005, 0.001$ und 0.0007. Benutze dazu das Runge-Kutta-Verfahren mit Schrittweite $h = 10^{-3}$. Beschreibe Beobachtungen und Probleme! Treten die Probleme auch auf, wenn man einen der anderen Löser benutzt?

Freiwilliger Zusatz: Kannst Du erklären, was beim „normalen“ Runge-Kutta-Verfahren bei $\varepsilon = 0.0007$ passiert?

Hinweis: Das Integrationsverfahren kann in `dstool` unter `Panels` → `Orbits...` → `Propagation...` ausgewählt werden. Voreingestellt ist das „normale“ Runge-Kutta-Verfahren. Die Schrittweite ist unter `Panels` → `Orbits...` zu finden, die Parameter können unter `Panels` → `Selected...` angepasst werden.

Aufgabe 16: Betrachte die Pendelgleichung

$$\ddot{x} + g(x) = 0$$

für eine stetige ungerade Funktion g mit $g(x) \cdot x > 0$ für $x \neq 0$. Sei $p(g, a) > 0$ die minimale Periode der Lösung mit Anfangswert $x(0) = a > 0$, $\dot{x}(0) = 0$. Zeige:

(i) Falls $g_1(x) < g_2(x)$ für alle $x > 0$, dann ist $p(g_1, a) > p(g_2, a)$ für alle $a > 0$.

(ii) Falls $x \mapsto g(x)/x$ für $x > 0$ streng monoton fällt, dann wächst $a \mapsto p(g, a)$ streng monoton für $a > 0$.

Hinweis: $y(t) := \frac{a_1}{a_2} x(t)$ löst die Gleichung $\ddot{y} + \tilde{g}(y) = 0$ mit $\tilde{g}(y) := \frac{a_1}{a_2} g(\frac{a_2}{a_1} y)$.