

## Übungen

# Einführung in die Dynamischen Systeme 1

Bernold Fiedler, Stefan Liescher

Abgabe: spätestens Montag, 24.05.2004, 10:00

**Aufgabe 17:** Gegeben sei die Differentialgleichung  $\dot{x} = f(x)$ ,  $f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ . Zeige, dass dann die Differentialgleichung

$$\dot{x} = \frac{1}{1 + |f(x)|^2} f(x)$$

auf  $\mathbb{R}^n$  definiert ist und der zugehörige Fluss  $\Phi(t, x)$  für alle Zeiten  $t \in \mathbb{R}$  und Anfangswerte  $x \in \mathbb{R}^n$  existiert.

**Aufgabe 18:** Betrachte die von einem Parameter  $\lambda \in \mathbb{R}$  abhängige Differentialgleichung

$$\dot{x}(t) = x^2 + \lambda, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Zeichne das zugehörige Vektorfeld auf  $X = \mathbb{R}$  für  $\lambda = -2$ ,  $\lambda = -1$  und  $\lambda = 1$ . Für welche Werte von  $\lambda$  ist das Verhalten der Lösungen ähnlich wie bei  $\lambda = -2$ , wann ändert sich das Verhalten ?

**Aufgabe 19:**

(i) Beschreibe für stetiges  $a \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  die Lösung der *linearen Differentialgleichung*

$$\dot{x} = a(t)x$$

mit Anfangswert  $x(0) = x_0$  durch „Trennung der Variablen“.

(ii) Löse dann die *inhomogene lineare Differentialgleichung*

$$\dot{x} = a(t)x + b(t),$$

mit stetigem  $b$  und Anfangsbedingung  $x(0) = x_0$ , indem Du eine (leicht lösbare) Differentialgleichung herleitest für

$$y(t) := x(t) \exp\left(-\int_0^t a(\tau) d\tau\right).$$

**Aufgabe 20:** In einem Meer sind Beute- und Räuberfische  $x$  bzw.  $y$ , die dem Volterra-Lotka Gesetz

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x(\mu - \nu y), \\ \dot{y} &= y(-\varrho + \sigma x),\end{aligned}$$

mit  $x, y, \mu, \nu, \varrho, \sigma > 0$  gehorchen. Durch  $\varepsilon$ -behutsames Netz-Fischen,  $\varepsilon > 0$ , wird  $\mu$  zu  $\tilde{\mu} = \mu - \varepsilon$  und  $\varrho$  zu  $\tilde{\varrho} = \varrho + \varepsilon$ . (Warum?) Wird dadurch der zeitlich gemittelte Beute-fischbestand

$$\bar{x} := \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t x(\tau) d\tau$$

größer oder kleiner? Was gilt für den Gesamtfischbestand  $\overline{x+y}$ ?

*Hinweis:*  $x = \sigma^{-1}(\dot{y}/y + \tilde{\varrho})$ .