

Übungen
Einführung in die Dynamischen Systeme
Bernold Fiedler, Stefan Liebscher
Abgabe: Donnerstag, 27.05.2004, in der Vorlesung

Aufgabe 21: Sei $X = \mathbb{R}^n$ und $\Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times X \rightarrow X$ eine Evolution mit zugehörigem nicht-autonomen Vektorfeld

$$f(s, x) = \left. \frac{\partial}{\partial t} \Phi_{t+s, s}(x) \right|_{t=0}.$$

Zeige:

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi} : \mathbb{R} \times \tilde{X} &\rightarrow \tilde{X}, \\ (t, (s, x)) &\mapsto (t + s, \Phi_{t+s, s}(x)), \end{aligned}$$

definiert einen Fluss auf dem *erweiterten Phasenraum* $\tilde{X} = \mathbb{R} \times X$. Das zugehörige Vektorfeld auf $\tilde{X}$ ist $\tilde{f}(s, x) = (1, f(s, x))$.

Aufgabe 22: Sei $f : X \rightarrow X = \mathbb{R}^n$ lokal Lipschitz-stetig und bezeichne $J(x_0) = (t_-(x_0), t_+(x_0))$ das maximale Existenzintervall der Lösung von

$$\dot{x}(t) = f(x(t)), \quad x(0) = x_0.$$

(i) Zeige, dass $x_0 \mapsto t_+(x_0) \in (0, \infty]$ unterhalb-stetig ist.

(ii) Zeige am System

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1^3(1 - x_2^2), \\ \dot{x}_2 &= -x_1^2x_2(1 - x_1^2), \end{aligned}$$

dass die maximale Existenzzeit t_+ hingegen nicht oberhalb-stetig (also nicht stetig) sein muss.

Hinweis: Eine Funktion g heißt unterhalb-stetig in x_0 genau dann, wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \quad (|x - x_0| < \delta \Rightarrow g(x) - g(x_0) > -\varepsilon),$$

und oberhalb-stetig genau dann, wenn $-g$ unterhalb-stetig ist.

Im zweiten Aufgabenteil nutze man analog zum Lotka-Volterra-System den Euler-Multiplikator $x_1^{-3}x_2^{-1}$, um ein divergenzfreies Vektorfeld mit gleichen Trajektorien zu erhalten. Das zugehörige Erste Integral ist berechenbar und besitzt bis auf eine Ausnahme nur beschränkte Niveaumengen, die deshalb nur beschränkte Trajektorien mit unbeschränkten Existenzintervallen beinhalten.

Aufgabe 23: Sei $f : X \times \mathbb{R} \rightarrow X = \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar. Bezeichne $x(t, t_0)$ die Lösung der Differentialgleichung

$$\dot{x}(t) = f(x(t), t), \quad x(t_0) = x_0$$

zur Zeit t . Zeige, dass man für festes τ , für das $x(\tau + t_0, t_0)$ existiert, die Abbildung

$$(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \rightarrow X, \quad s \mapsto x(\tau + s, s),$$

in einer Umgebung von t_0 nach s differenzieren kann. Welche Differentialgleichung erfüllt $v(t) := D_{t_0}x(t + t_0, t_0)$?

Aufgabe 24: Bekanntlich besitzt das Anfangswertproblem

$$\dot{x} = f(x) = x^2, \quad x(0) = 1$$

für $-\infty < t < 1$ eine Lösung, die „explodiert“, $\lim_{t \rightarrow 1} x(t) = +\infty$.

Sei $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ die Folge der Picard-Iterierten:

$$\begin{aligned} x_0(t) &\equiv 1, \\ x_{n+1}(t) &= 1 + \int_0^t f(x_n(s)) \, ds. \end{aligned}$$

- (i) Zeige, dass $x_k(t)$ für alle $k \in \mathbb{N}$ auf ganz $\mathbb{R}$ definiert ist.
- (ii) Berechne explizit $x_1(t), x_2(t), x_3(t)$ und $x_4(t)$.
- (iii) Für welche $t \in \mathbb{R}$ konvergieren die $x_k(t)$ gegen die Lösung $x(t)$ des Anfangswertproblems?

Freiwilliger Zusatz: Zeichne mit Hilfe des Computers (z.B. mit MATLAB oder MATHEMATICA) die Graphen der ersten acht Näherungen auf dem Intervall $t \in [-4, 2]$.