Übungen

Einführung in die Dynamischen Systeme

Bernold Fiedler, Stefan Liebscher

Abgabe: Donnerstag, 03.06.2004, in der Vorlesung

Aufgabe 25: Führe das Picard-Iterationsverfahren für die Gleichung

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t), \qquad x \in \mathbb{R}^n,\ A \in \mathbb{R}^{n\times n}, \\ x(0) &= x_0, \end{aligned}$$

explizit durch. Die Startfunktion ist $x^0(t) \equiv x_0$. Auf welchem t-Intervall konvergiert die Iteration?

Aufgabe 26: Bestimme die Lösungen der linearen Differentialgleichungen

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 \\ -1 & -3 & 5 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} x, \qquad x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} x, \qquad x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 27: Sei $A = (a_{ij})_{1\le i,j\le n}$ eine reelle $(n\times n)$-Matrix. Zeige, dass die Koeffizienten der Matrix e^{At} genau dann für alle $t \ge 0$ nicht-negativ sind, wenn $a_{ij} \ge 0$ für alle $i \ne j$.

Hinweis: Es genügt, den Fall zu betrachten, dass *alle* $a_{ij} \ge 0$ sind. (Warum?)

Aufgabe 28: [Lissajous-Figuren] Betrachte für eine symmetrische reelle 2×2-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$$

das Hamilton-System zur Hamiltonfunktion $H(x,\dot{x}) = \frac{1}{2}(\dot{x}^{\mathrm{T}}\dot{x} + x^{\mathrm{T}}Ax)$

$$(*) \qquad \ddot{x} = -Ax.$$

(i) Transformiere $(*)$ auf die Gestalt entkoppelter „Pendel“ (ω_1, ω_2 reell):

$$(**) \qquad \begin{cases} \ddot{y}_1 + \omega_1 y_1 = 0, \\ \ddot{y}_2 + \omega_2 y_2 = 0, \end{cases}$$

(ii) Skizziere (ohne `dstool` etc.) die Lösung $(x_1(t),\ x_2(t))$ von $(*)$ für

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$$

mit Anfangsbedingung $x_1 = x_2 = \dot{x}_1 = -\dot{x}_2 = 1$.

(iii) Zeichne (mit `dstool`) einige Lösungskurven von $(*)$ für drei selbst gewählte Wertepaare (ω_1, ω_2) mit $\omega_i > 1$.