

Übungen

Einführung in die Dynamischen Systeme

Bernold Fiedler, Stefan Liebscher

Abgabe: Donnerstag, 10.06.2004, in der Vorlesung

Aufgabe 29: Finde ein Gegenbeispiel, das zeigt, dass für reelle (2×2) -Matrizen A, B die Identität

$$e^A e^B = e^B e^A$$

nicht zu gelten braucht.

Aufgabe 30: Betrachte den Banachraum BC^1 der stetig differenzierbaren Vektorfelder $f : X \rightarrow X = \mathbb{R}^n$, für die gilt

$$\|f\|_{BC^1} := \sup_{x \in X} (|f(x)| + |f'(x)|) < \infty.$$

Seien $f, g \in BC^1$ und bezeichne $x(t, f)$ die Lösung der Differentialgleichung

$$\dot{x}(t) = f(x(t)), \quad x(0) = x_0$$

zur Zeit t . Kann man, für festes t , die Abbildung

$$x(t, \cdot) : BC^1 \rightarrow X, \quad f \mapsto x(t, f),$$

nach f differenzieren? Welche Differentialgleichung erfüllt gegebenenfalls die Variation $v(t) := D_f x(t, f)g$?

Aufgabe 31: Betrachte das gekoppelte lineare System

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + D(y - x), \\ \dot{y} &= Ay + D(x - y), \end{aligned}$$

mit x, y in \mathbb{R}^n . D bezeichnet eine Diagonalmatrix $D = \text{diag}(d_1, \dots, d_n)$, wobei alle $d_i > 0$ sind. Außerdem sei $\Re \text{spec}(A) < 0$.

- (i) Zeige: wenn $x(0) = y(0)$, dann konvergieren $x(t), y(t)$ gegen 0 für $t \rightarrow +\infty$.
- (ii) Finde trotzdem Matrizen A, D , so dass $x(t) \rightarrow \infty$ für gewisse $x(0), y(0)$ und $t \rightarrow +\infty$.

Hinweis: Wähle im zweiten Teil $n = 2$ und betrachte anschließend den invarianten Unterraum $\{x = -y\}$.

Aufgabe 32: Berechne numerisch (etwa mit `dstool`) die Wronski-Matrix $W(t)$ zur Lösung $x(t)$ der Lorenz-Gleichung

$$\begin{aligned}\dot{x} &= s(-x + y) \\ \dot{y} &= rx - y - xz \\ \dot{z} &= -bz + xy\end{aligned}$$

mit den Parametern $r = 28$, $s = 10$, $b = 8/3$ und der Anfangsbedingung $x_1(0) = x_2(0) = x_3(0) = 5$.

Dazu ist natürlich die Gleichung *und* die linearisierte Lorenzgleichung einzugeben, d.h. man betrachtet insgesamt 12 Gleichungen. Für t wähle die Werte 10, 15, 16.5, Schrittweite zwischen 0.01 und 0.05, Runge–Kutta–Verfahren. Wie groß ist wohl der Betrag des größten Eigenwertes von $W(t)$ ungefähr (ganz grobe Schätzung)? Deutung? Versuche bis $t = 30$ zugehen. Was passiert? Deutung?

Hinweis: In `dstool` sind alle benötigten Parameter und Variablen über die drei Dialogfelder `Panels` → `Selected...` und `Panels` → `Orbits...` → `Propagation...` erreichbar. Außerdem empfiehlt es sich, die Zeit als zusätzliche Variable (`t'=1`) mitzuführen. Dann kann man im Dialogfeld `Panels` → `Orbits...` als `Stopping condition` die Auswahl `Event stopping` mit z.B. `t = 15` treffen. Bedingungen an die „eigentliche“ Zeit `time` scheinen nicht korrekt implementiert zu sein.

Übrigens können in `dstool` zusätzlich zu dem Vektorfeld (mit Ableitungssymbol, z.B. `x'=-s*x+s*y`) auch abhängige Funktionen (ohne Ableitungssymbol, z.B. `f=x*x+y*y+z*z`) definiert und dann grafisch ausgegeben werden.