Übungen

Einführung in die Dynamischen Systeme

Bernold Fiedler, Stefan Liebscher

Abgabe: Donnerstag, 10.06.2004, in der Vorlesung

Aufgabe 29: Finde ein Gegenbeispiel, das zeigt, dass für reelle (2×2)-Matrizen A, B die Identität

$$\mathrm{e}^A \mathrm{e}^B = \mathrm{e}^B \mathrm{e}^A$$

nicht zu gelten braucht.

Aufgabe 30: Betrachte den Banachraum BC^1 der stetig differenzierbaren Vektorfelder $f: X \to X = \mathbb{R}^n$, für die gilt

$$\|f\|_{BC^1} := \sup_{x \in X}(|f(x)| + |f'(x)|) < \infty.$$

Seien $f, g \in BC^1$ und bezeichne $x(t, f)$ die Lösung der Differentialgleichung

$$\dot{x}(t) = f(x(t)), \qquad x(0) = x_0$$

zur Zeit t. Kann man, für festes t, die Abbildung

$$x(t, \cdot): BC^1 \to X, \qquad f \mapsto x(t, f),$$

nach f differenzieren? Welche Differentialgleichung erfüllt gegebenenfalls die Variation $v(t) := \mathrm{D}_f x(t, f) g$?

Aufgabe 31: Betrachte das gekoppelte lineare System

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + D(y - x), \\ \dot{y} &= Ay + D(x - y), \end{aligned}$$

mit x, y in $\mathbb{R}^n$. D bezeichnet eine Diagonalmatrix $D = \operatorname{diag}(d_1, \ldots, d_n)$, wobei alle $d_i > 0$ sind. Außerdem sei $\Re\mathrm{e}\, \operatorname{spec}(A) < 0$.

(i) Zeige: wenn $x(0) = y(0)$, dann konvergieren $x(t), y(t)$ gegen 0 für $t \to +\infty$.

(ii) Finde trotzdem Matrizen A, D, so dass $x(t) \to \infty$ für gewisse $x(0)$, $y(0)$ und $t \to +\infty$.

Hinweis: Wähle im zweiten Teil $n = 2$ und betrachte anschließend den <u>invarianten</u> Unterraum $\{x = -y\}$.

Aufgabe 32: Berechne numerisch (etwa mit `dstool`) die Wronski-Matrix $W(t)$ zur Lösung $x(t)$ der Lorenz-Gleichung

$$\begin{aligned}\dot{x} &= s(-x+y)\\ \dot{y} &= rx-y-xz\\ \dot{z} &= -bz+xy\end{aligned}$$

mit den Parametern $r = 28$, $s = 10$, $b = 8/3$ und der Anfangsbedingung $x_1(0) = x_2(0) = x_3(0) = 5$.

Dazu ist natürlich die Gleichung *und* die linearisierte Lorenzgleichung einzugeben, d.h. man betrachtet insgesamt 12 Gleichungen. Für t wähle die Werte 10, 15, 16.5, Schrittweite zwischen 0.01 und 0.05, Runge–Kutta–Verfahren. Wie groß ist wohl der Betrag des größten Eigenwertes von $W(t)$ ungefähr (ganz grobe Schätzung)? Deutung? Versuche bis $t = 30$ zugehen. Was passiert? Deutung?

Hinweis: In `dstool` sind alle benötigten Parameter und Variablen über die drei Dialogfelder `Panels` → `Selected...` und `Panels` → `Orbits...` → `Propagation...` erreichbar. Außerdem empfiehlt es sich, die Zeit als zusätzliche Variable (`t'=1`) mitzuführen. Dann kann man im Dialogfeld `Panels` → `Orbits...` als `Stopping condition` die Auswahl `Event stopping` mit z.B. `t = 15` treffen. Bedingungen an die „eigentliche" Zeit `time` scheinen nicht korrekt implementiert zu sein.

Übrigens können in `dstool` zusätzlich zu dem Vektorfeld (mit Ableitungssymbol, z.B. `x'=-s*x+s*y`) auch abhängige Funktionen (ohne Ableitungssymbol, z.B. `f=x*x+y*y+z*z`) definiert und dann grafisch ausgegeben werden.