

Übungen

Einführung in die Dynamischen Systeme

Bernold Fiedler, Stefan Liebscher

Abgabe: Donnerstag, 17.06.2004, in der Vorlesung

Aufgabe 33: Wieviele Ziffern (in Dezimaldarstellung) besitzt das einmillionste Glied der Folge $(1, 3, 8, 20, 48, 112, \dots)$, das heißt $x_n = 4x_{n-1} - 4x_{n-2}$ mit $x_0 = 1$ und $x_1 = 3$?

Aufgabe 34: In Analogie zur Darstellung eines Flusses zu einem Vektorfeld durch Variation der Konstanten wollen wir die Dynamik einer Abbildung beschreiben.

Gegeben sei also ein Banachraum X sowie Abbildungen $A : X \rightarrow X$ linear, $f : \mathbb{N} \rightarrow X$. Vervollständige nun die Formel

$$x(n) = A^{\circ} x_0 + \sum_{k=\circ}^{\circ} A^{\circ} f(\circ),$$

so dass dadurch die eindeutige Lösung $x : \mathbb{N} \rightarrow X$ des Anfangswertproblems

$$x(0) = x_0, \quad x(n+1) = Ax(n) + f(n), \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

gegeben ist. (Beweise dies!)

Aufgabe 35: Jede Trajektorie des Lipschitz-Vektorfeldes f sei beschränkt. Beweise oder widerlege: Gilt für die Anfangswerte

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{dist}(x_n, x) = 0,$$

so auch für ihre ω -Limesmengen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{dist}(\omega(x_n), \omega(x)) = 0.$$

Dabei benutzen wir als Abstandsbegriff zweier Mengen den symmetrischen Hausdorff-Abstand:

$$\text{dist}(A, B) := \max \left(\sup_{a \in A} \inf_{b \in B} \text{dist}(a, b), \sup_{b \in B} \inf_{a \in A} \text{dist}(a, b) \right).$$

Aufgabe 36: In unserem Garten betrachten wir noch einmal die Anzahl k_n von FIBONACCIS Kaninchenpaaren nach n Monaten. Wie in der Vorlesung bekommt jedes Paar ab seinem zweiten Lebensmonat monatlich genau ein Paar Junge.

$$k_{n+1} = k_n + k_{n-1}, \quad k_0 = k_1 = 1.$$

- (i) Schreibe die obige 2-Term-Rekursion als lineare Iteration $x_{n+1} = Ax_n$ für einen geeignet gewählten Vektor x und eine Matrix A .
- (ii) Transformiere A auf Jordansche Normalform und bestimme so eine explizite Lösungsformel für k_n .

Freiwilliger Zusatz: Was passiert, wenn wir in jedem Monat noch ein zusätzliches neugeborenes Kaninchenpaar in den Garten setzen? (Wie lautet dann die Rekursionsgleichung und die explizite Lösungsformel?)